12 Ravan u prostoru

Ravan u prostoru je analogna pravoj u ravni. Naime, obe objekta su opisana jednom linearnom jednačinom, samo što je u slučaju prave ta jednačina po dve promenlive x, y, a u slučaju ravni, ta je jednačina po tri promenljive x, y, z. Odatle dobijamo je dimenzija prave $2-1=1$, a dimenzija ravni $3-1=2$. Zato je za generisanje prave potreban jedan vektor pravca, za dimenziju ravni je potrebno dva nezavisna vektora.

12.1 Implicitna jednačina ravni

Ravan α je odredjena tačkom $A(x_0, y_0, z_0)$ koja joj pripada i normalnim vektorom ravni koga obično označavamo sa $\vec{n_\alpha}$. To je nenula vektor sa koordinatama $\vec{n_\alpha}\ (a, b, c)$.

Da bi izveli jednačinu ravni, neka je $M(x, y, z) \in \alpha$ proizvoljna tačka ravni. Tada je $\vec{AM}$ upravan na normalni vektor pa važi:

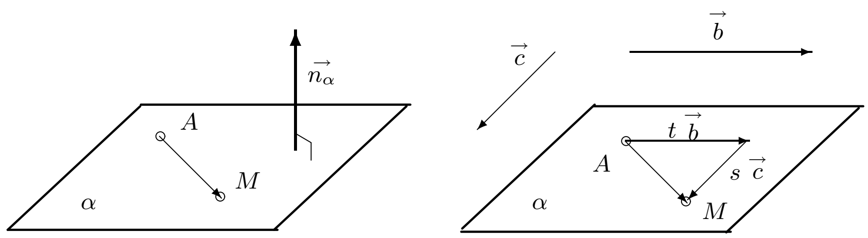
$$\begin{aligned} 0 &= \vec{n_\alpha} \cdot \vec{AM} = (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0. \end{aligned}$$

Dakle jednačinu proizvoljne ravni u prostoru možemo zapisati u obliku

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{35}$$

pri čemu nisu sva tri koeficienta a, b i c istovremeno jednaka nuli. Jednačina (35) se naziva **implicitna jednačina ravni**.

Primetimo da paralelne ravni i samo one imaju proporcionalne normalne vektore.



Slika 25: Implicitna i parametarska jednačina ravni

Posmatramo funkciju $f_\alpha : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$. Ona je jednaka 0 na tačkama ravni α, pa je zbog neprekidnosti veća od 0 u jednom poluprostoru, a manja od nule u drugomm poluprostoru odredjenom sa ravni α. To nam obezbedjuje način da karakterišemo **poluprostor**, tj. da proverimo da li su dve tačke sa iste strane ravni α ili ne. Naime, tačke X i Y pripadaju istom poluprostoru odredjenom sa ravni α ako i samo ako su $f_\alpha(X)$ i $f_\alpha(Y)$ istog znaka .

Ako je normalni vektor ravni jedinični, tj. $|\ \vec{n_\alpha}\ |^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ onda se jednačina (35) naziva **normalizovana jednačina ravni**.

Primer 12.1 *a) Odrediti ravan β koja sadrži tačku $B(1,3,-2)$ i paralelna ravni $\alpha : x-3y+4z-6=0$.*

b) Da li se tačke $A(1,1,1)$ i $C(-1,-1,3)$ nalaze sa iste strane ravni β.

Rešenje: *a) Kako paralelne ravni imaju proporcionalne normalne vektore, možemo uzeti $\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{n_\alpha}=(1,-3,4)$. Dakle jednačina ravni β je:*

$$1(x-1)-3(y-3)+4(z+2)=x-3y+4z+16=0.$$

b) Funkcija koja karakteriše ravan β je $f_\beta(x,y,z)=x-3y+4z+16$. Kako je $f(A)=18$, a $f(C)=30$, tačke su sa iste strane ravni β.

12.2 Parametarska jednačina ravni

Drugi način da opišemo ravan α jeste da joj zadamo jednu tačku $A(x_0,y_0,z_0)$ i dva vektora $\overrightarrow{u}\ (u_x,u_y,u_z)$ i $\overrightarrow{v}\ (v_x,v_y,v_z)$ paralelna ravni α. Tada se svaka tačka M ravni α može zapisati u obliku

$$M(t,s)=M=A+t\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{v}, \tag{36}$$

za neke brojeve $t,s\in\mathbb{R}$. Recimo, tačka A se dobija baš za $t=0=s$. Vektorska jednačina (36) se u koordinatama zapisuje kao

$$\begin{aligned} x &= x_0+tu_x+sv_x,\\ y &= y_0+tu_y+sv_y,\\ z &= z_0+tu_z+sv_z, \end{aligned} \tag{37}$$

za $t,s\in\mathbb{R}$ što obično zovemo **parametarska jednačina ravni**.

12.3 Prelazak iz parametarskog oblika u implicitni i obrnuto

Ako je ravan zadata parametarski, tj. jednačinom (37) tada eliminacijom parametara s i t dobijamo implicitnu jednačinu ravni.

Drugi način, koji je pogodniji za implementaciju, jeste da izračunamo normalni vektor ravni

$$\overrightarrow{n_\alpha}=(a,b,c)=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},$$

čime su odredjeni koeficienti a,b,c u jednačini (35). Preostali koeficienat d je odredjen relacijom

$$d=-ax_0-by_0-cz_0.$$

Primer 12.2 *Data je ravan α parametarski:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x &=& 3 &+& 2t &+& s,\\ y &=& -7 &-& t, & & \\ z &=& & & t &-& 6s, \end{array}$$

$t,s\in\mathbb{R}$. Odrediti implicitni oblik te ravni.

Prvi način: *Jednačina ravni se može dobiti tzv. "eliminacijom parametara" t i s. Naime, iz druge jednačine imamo $t=-7-y$. Kada to zamenimo u prvu i treću jednačinu dobijamo:*

$$;s=x+2y+11,\quad 6s=-y-z-7,$$

tj. eliminisali smo parametar t. Množeći prvu jednačinu sa 6 i oduzimajući od druge dobijamo jednačinu ravni $\alpha : 6x+13y+z+73=0$.

Drugi način: *Iz jednačina se vidi da tačka* $A(3,-7,0)$ *pripada ravni, a da su vektori* $\vec{u}=(2,-1,1)$, $\vec{v}=(1,0,-6)$ *paralelni ravni* α. *Zato je*

$$\vec{n_\alpha}=\vec{u}\times\vec{v}=(6,13,1).$$

Koeficienat d izračunamo po navedenoj formuli i dobijamo jednačinu ravni α : $6x+13y+z+73=0$.

Obrnuto, pretpostavimo da je ravan α zadata implicitno jednačinom (35). Tada su vektori paralelni ravni normalni na normalni vektor ravni $\vec{n_\alpha}=(a,b,c)$, pa njihove koordinate (x,y,z) zadovoljavalju jednačinu

$$ax+by+cz=0. \tag{38}$$

Iz tog uslova je potrebno odrediti nezavisne vektore $\vec{u}$ i $\vec{v}$ paralelne ravni.

Potrebno je odrediti i jednu tačku A ravni α. Nije teško proveriti da tačka

$$A(Na,Nb,Nc),\quad N=\frac{-d}{a^2+b^2+c^2},$$

uvek pripada pravoj.

Primer 12.3 *Odrediti parametarski oblik ravni* $\alpha: x-y+6z-1=0$.

Prvi način: *Normalni vektor ravni* α *je* $\vec{n_\alpha}=(1,-1,6)$. *Zato su vektori paralelni ravni* α *normalni na njega i zadovoljavalju jednačinu* $x-y+6z=0$. *Za* $x=1, y=0$ *dobijamo* $z=-\frac{1}{6}$, *tj. vektor* $(1,0,-\frac{1}{6})$. *Zgodnije je uzeti kolinearan vektor* $\vec{u}=(6,0,-1)$. *Slično za* $x=0, y=1$ *dobijamo vektor* $\vec{v}=(0,6,1)$. *Tačka ravni je bilo koja tačka koja zadovoljava jednačinu ravni, recimo* $A(1,0,0)$. *Zato je parametarska jednačina ravni*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x &=& 1 &+& 6t, && \\ y &=& && &&6s, \\ z &=& &-& t &+& s. \end{array}$$

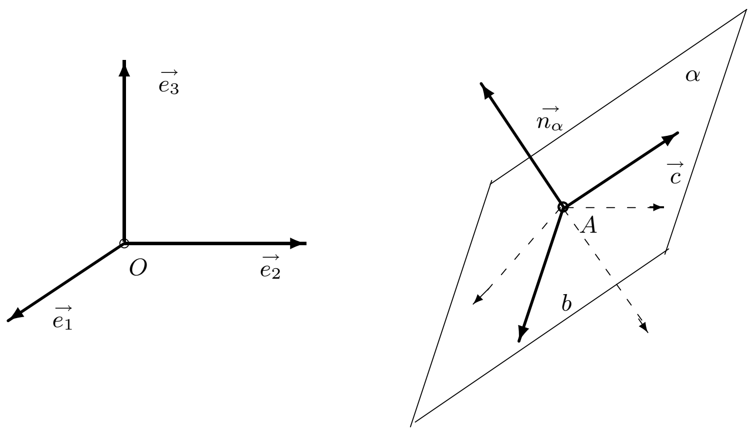
Drugi način: *Možemo jednačinu ravni* α *posmatrati kao sistem jednačina koji treba rešiti. Uzmimo da su* $y=t$ *i* $z=s$ *parametri. Tada je* $x=1+y-6z=1+t-6s$, *pa je parametarkska jednačina ravni:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x &=& 1 &+& t &-& 6s, \\ y &=& && t, && \\ z &=& && && s. \end{array}$$

Primetite da parametarske jednačine jedne iste ravni mogu da budu potpuno različite.

12.4 Izbor koordinatnog sistema u odnosu na datu ravan

Za rešavanje mnogih problema korisno je preći na novi ortonormirani koordinatni sistem $Ax'y'z'$ u kom data ravan $\alpha: ax+by+cz+d=0$ ima jednačinu $z'=0$.



Slika 26: Koordinatni sistem u odnosu na datu ravan

Vektor z' ose, tj. treći novi bazni vektor je do na znak jedinstven. To je jedinični vektor normale $\vec{n_\alpha}$. Potrebno je izabrati još i vektore $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tako da $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n_\alpha})$ bude ortonormirana baza pozitivne orjentacije. Zato vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ moraju da zadovoljavaju jednačinu (38). Vektor $\vec{u}= (x, y, z)$ biramo da bude ma koji jedinični vektor koji zadovoljava tu jednačinu. Vektor $\vec{v}=\vec{n_\alpha} \times \vec{u}$, će tada biti jedinični i ortogonalan na prethodn dva. Tako konstruisani reper $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n_\alpha})$ je ortonormiran pozitivne orjentacije. Za novi koordinatni početak možem uzeti bilo koju tačku $A \in \alpha$.

Napomenimo da izbor tog kordinatnog sistema nije jedinstven. Pored proizvoljnosti u izboru koordinatnog početka $A \in \alpha$ i znaka $\pm\, \vec{n_\alpha}$ jedničnog vektora normale i ortonormirana baza $(\vec{u}, \vec{v})$ ravni α je do na rotaciju proizvoljna.

Izbor takvog koordinatnog sistema je koristan kada želimo da analitički predstavimo likove u datoj ravni α kao u narednom primeru.

Primer 12.4 *Data je ravan $\alpha : x + 2y + 2z - 1 = 0$ i u njoj tačka $C(3, 1, -2)$. Odrediti parametrizaciju kruga k poluprečnika $r = 2$ sa centrom C koji pripada ravni α.*

Rešenje: *Jedinični normalni vektor je $\vec{n_\alpha}= \frac{1}{3}(1, 2, 2)$. Jednačina (38) postaje $x+2y+2z = 0$, a jedan vektor koji je zadovoljava je $\vec{u}= (-2y, y, 0), y \in \mathbb{R}$, a iz uslova da je $\vec{u}$ normiran, računamo y i dobijamo*

$$\vec{u}= (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0).$$

Konačno je

$$\vec{v}=\vec{n_\alpha} \times \vec{u}= \frac{1}{15}(-2\sqrt{5}, -4\sqrt{5}, 5\sqrt{5}).$$

Sada je parametrizacija kruga k:

$$M(\phi) = C + 2\cos\phi\, \vec{u} + 2\sin\phi\, \vec{w}, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

12.5 Vežbanja

12.1 *Ravni $x - y - 2 = 0$ odrediti parametarski jednačinu.*

12.2 *Odrediti implicitni oblik ravni* α :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2 & - & 3t & + & s, \\ y & = & 3 & - & t & - & s \\ z & = & 1 & & & + & 2s. \end{array}$$

12.3 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke* $A(1,2,3)$, $B(-1,2,-1)$ *i* $C(0,0,1)$.

13 Prava u prostoru

Postoji više načina da zadamo pravu u prostoru. Jedan je primenljiv u svakoj dimenziji: zadavanje prave tačkom i vektorom pravca. Prava se može zadati i kao presek dve ravni, tj. sistemom dve linearne jednačine po tri nepoznate. To odgovara činjenici da je dimenzija prave $3-2=1$. Primetimo da u prostoru prava nema jedinstven normalni vektor, već čitavu ravan normalnih vektora.

13.1 Parametarski oblik jednačine prave

Prava u prostoru je zadata tačkom $P(x_0, y_0, z_0)$ i nenula vektor pravca $\overrightarrow{p}\ (p_x, p_y, p_z)$. Tada se svaka tačka M prave p može zapisati u obliku

$$M(t) = M = P + t\ \overrightarrow{p}, \tag{39}$$

za neko $t \in \mathbb{R}$. Recimo, tačka P se dobija baš za $t = 0$. Vektorska jednačina (16) se u koordinatama zapisuje kao

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \\ z &= z_0 + tp_z, \end{aligned} \tag{40}$$

$t \in \mathbb{R}$ što obično zovemo **parametarska jednačina prave**. Kao i u ravni, parametarski oblik možemo videtikao kretanje konstantnom brzinom $\overrightarrow{p}$, pri čemu je parametar t vreme.

Kada jednačine prave (40) rešimo po parametru t dobijamo

$$\frac{x-x_0}{p_x} = \frac{y-y_0}{p_y} = \frac{z-z_0}{p_z} = t, \tag{41}$$

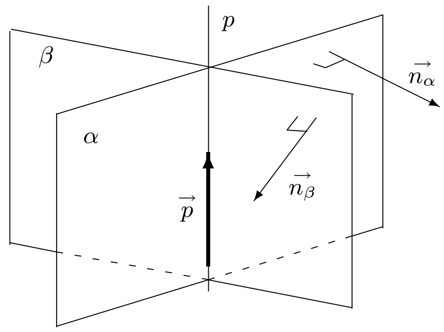
što se često zove **kanonski oblik jednačine prave.** Primetimo da on nije jedinstven, pa dakle ni zaista kanonski.

13.2 Prava kao presek dve ravni

Posmatrajmo sistem dve linearne jednačine

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad ax + by + cz + d = 0, \\ \beta: &\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{aligned} \tag{42}$$

koje predstavljaju ravni α i β. Ako su vektori $\overrightarrow{n_\alpha}$ i $\overrightarrow{n_\beta}$ kolinearni, tj. $|\ \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta}\ | = 0$, prave su paralelne ili se poklapaju. U suprotnom, ako su vektori $\overrightarrow{n_\alpha}$ i $\overrightarrow{n_\beta}$ nezavisni one se seku po jedinstvenoj pravoj $p = \alpha \cap \beta$.



Slika 27: Prava kao presek dve ravni

Pošto prava p pripada obema ravnima ona je normalna na njihove normalne vektore $\vec{n_\alpha}$, $\vec{n_\beta}$, pa je zato $\vec{p}=\vec{n_\alpha}\times\vec{n_\beta}$. Da bismo odredili jednu tačku prave p dovoljno je odrediti jedno rešenje sistema (42), recimo ono za $z=0$ (ako takvo postoji).

Primer 13.1 *Pravu p koja je presek ravni $\alpha : 3x-y+2z+1=0$ i $\beta : x-z=0$ predstaviti u kanonskom obliku.*

Prvi način: *Imamo da je $\vec{n_\alpha}=(3,-1,2)$ i $\vec{n_\beta}=(1,0,-1)$, pa je*

$$\vec{p}=\vec{n_\alpha}\times\vec{n_\beta}=(1,5,1).$$

Da bismo dobili tačku prave p, neka je recimo $x=2=z$. Tada je druga jednačina zadovoljena, a iz prve dobijamo $y=11$, pa tačka $P(0,1,0)$ pripada p. Zato je

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-11}{5}=\frac{z-2}{1}$$

kanonski oblik prave p.

Drugi način: *Možemo pravu p dobiti rešavanjem sistema jednačina α i β. Neka je, recimo, $z=t$. Tada je $x=t$, a $y=3x+2z+1=3t+2t+1=5t+1$. Rešavanjem po t dobijamo jednačinu prave $p:$*

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{5}=\frac{z}{1}(=t)$$

Primetimo da "kanonska" jednačina jedne iste prave može da ima različit oblik.

Obrnuto, ako je prava p zadata u obliku (41) tada je lako odrediti dve ravni koje se po njoj seku, recimo:

$$\gamma : \frac{x-x_0}{p_x}=\frac{y-y_0}{p_y}, \qquad \delta : \frac{y-y_0}{p_y}=\frac{z-z_0}{p_z}.$$

Konačno, primetimo da beskonačno mnogo ravni sadrži datu pravu p - one čine tzv. **pramen ravni**.

Teorema 13.1 *Skup svih ravni koje sadrže pravu p koja je data jednačinom (42), osim ravni β je dat jednačinom*

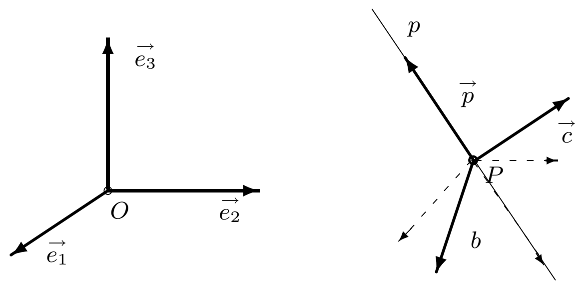
$$\gamma_\lambda : ax+by+cz+d+\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)=0,$$

za $\lambda\in\mathbb{R}$.

Dokaz: Primetimo da je jednačina ravni γ_λ zavisna od jednačina α i β ako i samo ako je sistem koji se sastoji od njihove tri jednačine ekvivalentan sistemu (42). Geometrijski rečeno: $\alpha\cap\beta=p=\alpha\cap\beta\cap\gamma_\lambda$ što važi ako i samo ako je $\gamma_\lambda\supset p$. $\square$

13.3 Koordinatni sistem u odnosu na datu pravu

Slično kao u slučaju ravni u primenama se javlja potreba za odredjivanjem koordinatnog sistema $Ox'y'z'$ u odnosu na koji se data prava p poklapa sa Oz' osom. U tom sistemu jednačina prave p je $p : x' = 0, y' = 0$.



Slika 28: Koordinatni sistem u odnosu na datu pravu

Ortonormirana baza $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{p})$ dobija se kao u slučaju ravni, ali se umesto vektora $\vec{n_\alpha}$ uzima vektor $\vec{p}$ prave p. Za koordinatni početak može se uzeti bilo koja tačka prave p.

13.4 Vežbanja

13.1 *Pravu $p : x = t + 4, y = -2t + 1, z = 3t - 2, t \in \mathbb{R}$ zapisati kao presek dve ravni.*

13.2 *Pravu $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$ zapisati parametarski.*

14 Medjusobni odnosi linearnih objekata u prostoru

14.1 Rastojanja u prostoru

Na osnovu Teoreme 6.1 koja važi i u prostoru rastojanje tačke M od prave p je dato formulom

$$d = \frac{|\vec{p} \times \vec{PM}|}{|\vec{p}|}.$$

Slično Teoremi 6.2 može se dokazati sledeća teorema

Teorema 14.1 *Rastojanje tačke $M(x_0, y_0, z_0)$ od ravni $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ dato je formulom*

$$d(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

14.1 *Odrediti rastojanje tačke $M(1, 0, 12)$ od prave $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.*

14.2 *Odrediti rastojanje tačke $M(1, 0, 12)$ od ravni $\alpha : x - y - 4z = 0$.*

14.3 *Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : x = 4t - 2, y = t + 2, z = -2t - 2$, i čije je rastojanje od tačke $M(3, 2, 1)$ jednako $\sqrt{14}$.*

14.2 Medjusobni položaji dve ravni

Dve ravni u prostoru mogu da se poklapaju, da budu paralelne ili da se seku po pravoj. Pogledajmo kako se ovi slučajevi analitički lako zapisuju

Neka su date ravni $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ i $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

1) Ravni se poklapaju ako su im jednačine proporcionalne, tj. ako je

$$a' = \lambda a, \;\; b' = \lambda b, \;\; , c' = \lambda c, \;\; , d' = \lambda d,$$

za neki broj $\lambda \neq 0$.

2) Ravni su paralelne ako su im normalni vektori $\overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$ i $\overrightarrow{n_\beta} = (a', b', c')$ kolinearni, tj. ako je

$$a' = \lambda a, \;\; b' = \lambda b, \;\; , c' = \lambda c,$$

za neki $\lambda \neq 0$. Za implementaciju je pogodan ekvivalentan uslov $\mid \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta} \mid = 0$. Primetimo da je uslov paralelnosti ravni specijalni uslov poklapanja ravni.

3) Ravni se seku po pravoj ako nisu paralelne, tj. ako su im normalni vektori nekolinearni, što je ekvivalentno sa $\mid \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta} \mid \neq 0$.

14.3 Medjusobni položaji dve prave u prostoru

Ako su dve prave u prostoru paralelne ili se seku, tada i samo tada, su one i koplanarne, tj. postoji jedinstvena ravan koja ih sadrži. Ako dve prave u prostoru nisu koplanarne tada takve prave zovemo **mimoilazne**. Dakle, prave u prostoru mogu da budu paralelne, da se seku i da budu mimoilazne.

Videli smo da se ista prava može predstaviti različitim jednačinama. Zato ćemo posebnu pažnju posvetiti i slučaju kada se prave poklapaju, tj. problemu kako ustanoviti da li neke jednačine predstavljaju istu pravu.

Neka su prave p i q date vektorima pravca $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ i tačkama $P \in p$, $Q \in q$.

14.3.1 Paralelne prave i prave koje se poklapaju

Primetimo prvo da, prave se poklapaju ili su paralelne ako i samo ako su im vektori pravca kolinearni. Kako onda razlikovati ova dva slučaja?

Pored vektora pravih $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$, posmatrajmo i vektor $\overrightarrow{PQ}$. Prave se poklapaju ako i samo ako su sva ta tri vektora kolinearna (pri tome se može desiti, ako je slučajno $P = Q$, da $\overrightarrow{PQ}$ bude nula vektor). Prave su paralelne ako vektor $\overrightarrow{PQ}$ nije kolinearan sa $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$. Dakle, dokazali smo teoremu

Teorema 14.2 *i) Prave p i q se poklapaju ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{PQ}$ kolinearni.*

ii) Prave p i q su paralelne i različite ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ kolinearni, a vektor $\overrightarrow{PQ}$ im nije kolinearan.

Kao i obično, u implementaciji se uslov kolinearnosti vektora $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ odredjuje uslovom $\mid \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} \mid = 0$.

14.3.2 Prave koje se seku i mimoilazne prave

Vektori pravca pravih koje se seku i mimoilaznih pravih su nekolinearni. Kako onda razlikovati ta dva slučaja? Prave koje se seku su koplanarne, pa su zato koplanarni i vektori $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$. Kod mimoilaznih pravih ta tri vektora nisu koplanarna, jer bi u suprotnom i prave p i q bile koplanarne.

Prethodno razmatranje možemo sumirati sledećom teoremom.

Teorema 14.3 *i) Prave p i q se seku ako i samo ako su vektori* $\vec{p}$ *i* $\vec{q}$ *nisu kolinearni, a vektori* $\vec{p}$, $\vec{q}$ *i* $\overrightarrow{PQ}$ *su koplanarni.*

ii) Prave p i q su mimoilazne ako i samo ako vektori $\vec{p}$, $\vec{q}$ *i* $\overrightarrow{PQ}$ *nisu koplanarni.*

Uslov koplanarnosti, tj. linearne zavisnosti tri vektora, se obično odredjuje uslovom $[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}] = 0$.

Medjusobni položaj dveju pravih možemo odrediti postupkom koji je opisan u sledećem primeru. Taj nam postupak daje i koordinate presečne tačke ukoliko ona postoji.

Primer 14.1 *Odrediti medjusobni položaj pravih*

$$p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-19}{5} = \frac{z-2}{1}, \qquad q : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}.$$

Rešenje: *Parametrizujmo pravu p parametrom t, a pravu q parametrom s. Tada važi*

$$p : x = t+2,\ \ y = 5t+19,\ \ z = t+2;$$

$$q : x = 2s+1,\ \ y = 3s,\ \ z = 4s-2.$$

Da bismo dobili presečnu tačku izjednačimo x, y i z koordinatu i dobijamo sistem po t i s:

$$t+2 = 2s+1, \quad 5t+19 = 3s, \quad t+2 = 4s-2. \tag{43}$$

Iz prve dva jednačine dobijamo $t = -5, s = -2$. *To ipak nije rešenje sistema, jer zamenom u treću jednačinu dobijamo* $-3 = -10$, *što je kontradikcija. Dakle, prave se ne seku, pa su ili mimoilazne ili paralelne. Kako njihovi vektori pravca* $\vec{p} = (1,5,1)$ *i* $\vec{q} = (2,3,4)$ *nisu kolinearni, prave nisu paralelne, već mimoilazne.*

Primetimo da se medjusobni položaj dveju pravih može odrediti diskusijom sistema (43). Naime, ako sistem ima jedinstveno rešenje, prave se seku; ako ima beskonačno mnogo rešenja (tj. sve tri jednačine po t i s su svode na jednu) prave se poklapaju, a ako je protivrečan prave su ili paralelne ili mimoilazne.

14.4 *Odrediti medjusobni položaj pravih (i presečnu tačku ako postoji) pravih:*

$$a)\quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : 2x = y, 3x = z$$

$$b)\quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$

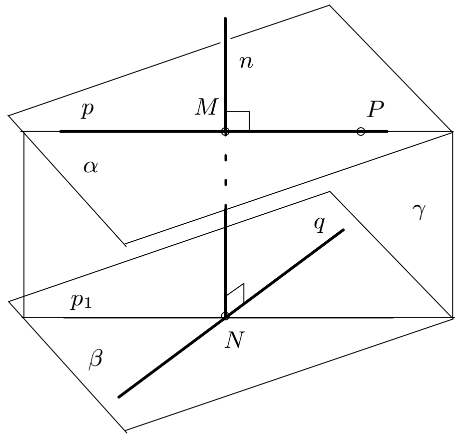
$$b)\quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$$

14.4 Mimoilazne prave

Osnovna teorema za mimoilazne prave je sledeća.

Teorema 14.4 *Mimoilazne prave p i q imaju jedinstvenu* **zajedničku normalu**, *tj. pravu n koja seče obe prave p i q i na njih je upravna.*

Neka je β ravan koja sadrži pravu q i paralelna je pravoj p. Neka je γ ravan koja sadrži pravu p i upravna je na ravni β. Ona seče pravu q u nekoj tački N. Dokažimo da je prava n koja sadrži tačku N i upravna je na ravan β je tražena normala.



Slika 29: Mimoilazne prave

Prava n seče pravu q u tački N i upravna je na $q \subset \beta$ (jer je $n \perp \beta$). Kako su i prava n i ravan γ upravne na ravan β i obe sadrže tačku N, važi $n \subset \gamma$. Prave n i p pripadaju istoj ravni γ, tj. koplanarne su. Kako je $n \perp \alpha$ i $p \subset \alpha$ važi i $n \perp p$ i prave n i p se seku u nekoj tački M, pa je prava n zaista zajednička normala. $\square$

Može se pokazati da upravo rastojanje izmedju podnožja M i N zajedničke normale realizuje minimum rastojanja izmedju pravih p i q, tj. $d(p,q) = d(M,N)$. Za odredjivanje tog rastojanja često se koristi formula koju dokazujemo sledećom teoremom.

Teorema 14.5 *Rastojanje izmedju mimoilaznih pravih p i q dato je sledećom formulom*

$$d(p,q) = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\ \vec{p} \times \vec{q}\ |}.$$

Dokaz: Vektori $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ razapinju paralelepiped. Za njegovu osnovu možemo uzeti paralelogram koga razapinju vektori $\vec{p}$, $\vec{q}$ i koji se nalazi u ravni α iz dokaza prethodne teoreme. Odgovarajuća visina h paralelepipeda jednaka je rastojanju izmedju paralelnih ravni α i β u kojima se nalaze osnova i protivosnova, tj. rastojanju mimoilaznih pravih p i q. Kako je zapremina V paralelepipeda jednaka proizvodu površine B baze i visine h, a po Teoremi 14.4 se izražava i preko mešovitog proizvoda, imamo

$$|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]| = V = B\,h = |\ \vec{p} \times \vec{q}\ |\, d(p,q),$$

odakle sledi tvrdjenje. $\square$

Za analitičko odredjivanje zajedničke normale može se primeniti postupak opisan u Teoremi 14.4, ali i metod opisan u sledećem primeru.

Primer 14.2 *Odrediti zajedničku normalu i rastojanje izmedju mimoilaznih pravih*

$$p : \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0} \qquad q : \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5.}$$

Rešenje: *Tačka M prave p je parametrizovana sa*

$$M(2t+5, t+2, -t-1),$$

a tačka N prave q sa:

$$N(4s-1, -3s+4, -5s+15).$$

Vektor MN je dat sa

$$\vec{MN}\ (-6+4s-2t, 2-3s-t, 16-5s+t).$$

Da pri prava MN bila zajednička normala mora da važi $MN \perp p$, odnosno $0 = \vec{MN} \cdot \vec{p}$ što nam daje jednačinu:

$$0 = 2(-6+4s-2t) + 1(2-3s-t) - 1(16-5s+t) = -26 + 10s - 6t.$$

Slično iz uslova $MN \perp q$ dobijamo jednačinu

$$0 = 4(-6+4s-2t) - 3(2-3s-t) - 5(16-5s+t) = -110 + 50s - 10t.$$

Iz prethodne dve jednačine dobijamo $s = 2, t = -1$. Zato su podnožja zajedničke normale $M(3,1,0)$ i $N(7,-2,5)$. Dakle jednačina normale je

$$n : \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{5}.$$

Rastojanje izmedju pravih je $d(p,q) = MN = 5\sqrt{2}$.

14.5 *Odrediti zajedničku normalu i rastojanje izmedju mimoilaznih pravih p : $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ i q : $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.*

14.5 Medjusobni položaj prave i ravni

Prava p i ravan α mogu da se seku u jednoj tački, da budu paralelne ili da prava pripada ravni.

Da bi odredili presek prave

$$p : \frac{x-x_0}{p_x} = \frac{y-y_0}{p_y} = \frac{z-z_0}{p_z} = t$$

i ravni $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ potrebno je zameniti jednačine prave, tj. relacije (40) u ravan, odakle se dobija jednačina po parametru t

$$(ap_x + bp_y + cp_z)t = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d). \tag{44}$$

Označimo

$$N = ap_x + bp_y + cp_z, \qquad D = ax_0 + by_0 + cz_0 + d.$$

Primetimo da je vrednost N jednaka nula ako i samo ako je $\vec{n_\alpha} \perp \vec{p}$, tj. $p \parallel \alpha$. Takodje, broj D je jednak nuli ako i samo ako tačka $P(x_0, y_0, z_0) \in p$ pripada ravni α. Pri rešavanju jednačine (44) razlikujemo tri slučaja:

i) $N \neq 0$. Postoji jedinstvena presečna tačka koja je odredjena sa $t = -\frac{D}{N}$.

ii) $N = 0,\ D \neq 0$. Jednačina (44) nema rešenje, pa prava i ravan nemaju zajedničkih tačaka. Geometrijski, iz $N = 0$ sledi da je p paralelna ravni α, dok iz $D \neq 0$ važi da $P \notin \alpha$, tj. $p \not\subset \alpha$.

iii) $N = 0,\ D = 0$. U ovom sluăju jednačina (44) je zadovoljena za svako $t \in \mathbb{R}$, tj. prava je podskup ravni, $p \subset \alpha$.

14.6 *Data je ravan* $\alpha : x - 2y + 5z - 1 = 0$. *Odrediti presek te ravni sa pravama:*
a) $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{7} = \frac{z}{1}$;
b) $q : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$;
c) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$;
d) $s : x - y = 1, x + y - z + 5 = 0$;
e) $t : x - z + 2 = 0, -y + 3z + 2 = 0$.

14.5.1 Ugao izmedju dve prave

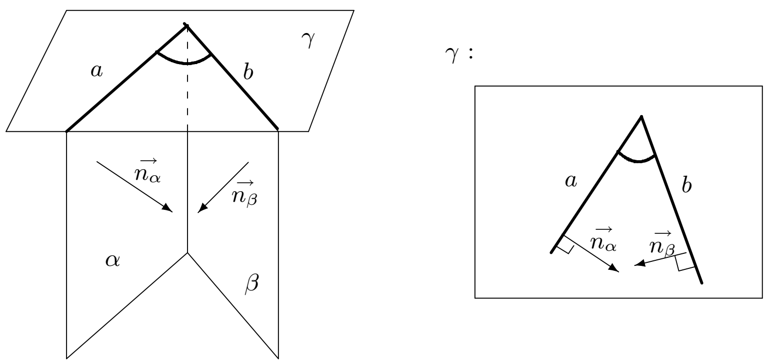
Ugao izmedju pravih p i q definišemo kao oštar ugao izmedju njihovih normalnih vektora, tj.

$$\angle(p, q) = \text{oštar}\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \arccos \frac{|\ \vec{p} \cdot \vec{q}\ |}{|\ \vec{p}\ ||\ \vec{q}\ |}.$$

U prethodnoj formuli, apsolutnu vrednost $|\ \vec{p} \cdot \vec{q}\ |$ smo uzeli kako bismo dobili oštar ugao. Ovu definicija ugla važi i za mimoilazne prave.

14.5.2 Ugao izmedju dve ravni

Podsetimo se kako se odredjuje ugao izmedju ravni α i β. Neka je γ ravan koja je normalna na ravni α i β (tj. normalna je na njihovu presečnu pravu) i koja ih seče po pravama redom a i b. Ugao izmedju ravni α i β jednak je uglu izmedju pravih a i b.



Slika 30: Ugao izmedju ravni

Kako za normalne vektore ravni α i β važi $\vec{n_\alpha} \perp a$ i $\vec{n_\beta} \perp b$, na osnovu jednakosti uglova sa normalnim kracima, imamo

$$\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b) = \text{oštar } \angle(\vec{n_\alpha}, \vec{n_\beta} .$$

Zato ugao izmedju ravni računamo sledećom formulom

$$\angle(\alpha,\beta) = \frac{|\vec{n_\alpha}\cdot\vec{n_\beta}|}{|\vec{n_\alpha}||\vec{n_\beta}|}.$$

14.7 *Izračunati ugao ravni* $\alpha : x+2y-3z-1=0$ *i* $\beta : 2x-3y+4z+2=0$ *(za računanje* arccos *koristiti digitron).*

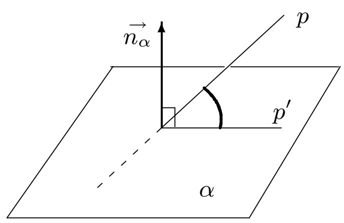
14.8 *Odrediti ravan* α *koja sadrži tačku* $M(1,-1,1)$*, paralelna je pravoj* $p : x+z=0, x+2y-2=0$*, a sa ravni* $\beta : 4x+y-z+2=0$ *gradi ugao od* $\frac{\pi}{4}$*.*

14.5.3 Ugao izmedju prave i ravni

Ugao izmedju prave p i ravni α je po definiciji ugao izmedju prave p i njene normalne projekcije p' na ravan α.

Uz pomoć normalnog vektora $\vec{n_\alpha}$ ravni α i vektora pravca $\vec{p}$ prave p taj se ugao može izraziti kao:

$$\angle(p,\alpha) = \angle(p,p') = \frac{\pi}{2} - \text{oštar}\ \angle(\vec{p},\vec{n_\alpha}) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{|\vec{p}\cdot\vec{n_\alpha}|}{|\vec{p}||\vec{n_\alpha}|}.$$



Slika 31: Ugao izmedju prave i ravni

14.9 *Izračunati (koristeći digitron za* arccos*) ugao izmedju prave* $p : x+2y-3z-1=0, x-z+2=0$ *i ravni* $\alpha : x-4y+2z+2=0$*.*

15 Razni zadaci

15.1 *Odrediti jednačinu normale iz tačke* $A(2,3,-1)$ *na ravan* $\alpha : 2x+y-4z+5=0$*.*

15.2 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku* $M(-1,0,3)$ *i normalna je na pravu* $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1}$*.*

15.3 *Odrediti tačku* Q *koja je simetrična tački* $P(3,-2,-4)$ *u odnosu na ravan* $\alpha : 6x+2y-3z-75=0$ *kao i projekciju* P' *tačke* P *na ravan* α*.*

15.4 *Odrediti tačku* Q *koja je simetrična tački* $P(-1,-2,1)$ *u odnosu na pravu* $l : \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$ *kao i projekciju* P' *tačke* P *na pravu* l*. (Uputstvo: Neka je* α *ravan koja sadrži* P*, a normalna je na* l *i* $\{S\} = \alpha \cap l$ *Tada je* S *središte duži* PQ*.)*

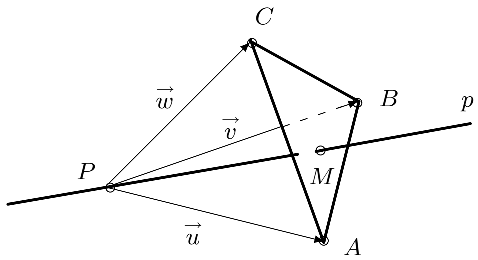
15.5 *Odrediti jedančinu ravni koja sadrži pravu* $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ *i normalna je na ravan* $\alpha : 2x-4y+z+5=0$*.*

15.6 *Odrediti λ tako da se prave $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ i $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ seku. Koje su koordinate presečne tačke?*

15.7 *Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $L(2,-1,7)$ i seče prave $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ i $q : \frac{x-7}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.*

15.0.4 Prodor prave kroz trougao

Kako ćemo ubrzo videti, složeniji objekti u prostoru se često aproksimiraju trouglovima. Zato se često javlja potreba da odredimo prodor date prave p kroz trougao ABC. Odredjivanje prodora prave, poluprave ili duži kroz ravan α tog trougla smo opisali u prethodnom poglavlju, pa je potrebno proveriti da li nadjena tačka pripada unutrašnosti trougla ili ne. Za to postoje razni načini, od kojih mi izlažemo onaj koje podseća na rešenje sličnog problema u ravni.



Slika 32: Prodor prave kroz trougao

Neka je prava p odredjena vektorom pravca $\vec{p}$ i tačkom $P \in p$. Neka je $M \neq P$ prodorna tačka prave p kroz ravan trougla ABC i

$$\vec{v} = \vec{PA}, \quad \vec{u} = \vec{PB}, \quad \vec{w} = \vec{PC}\ .$$

Prave PA, PB i PC su ivice triedra kom pripada i trougao ABC. Primetimo da ce prava p seći trougao ako i samo ako ona pripada tom triedru. To će se desiti ako i samo ako su baze $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{p})$, $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{p})$, i $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{p})$ iste orjentacije. Kako baze iste orjentacije daju isti znak mešovitog proizvoda dobijamo da **tačka M pripada trouglu ako i samo ako**

$$sign[\vec{v}, \vec{u}, \vec{p}] = sign[\vec{u}, \vec{w}, \vec{p}] = sign[\vec{w}, \vec{v}, \vec{p}]. \tag{45}$$

Ako je neki od tih mešovitih proizvoda jednak nuli, to znači da tačka M pripada pravoj odredjenom odgovarajućom ivicom trougla. Recimo, ako je $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{p}] = 0$ to znači da tačka M pripada pravoj AB.

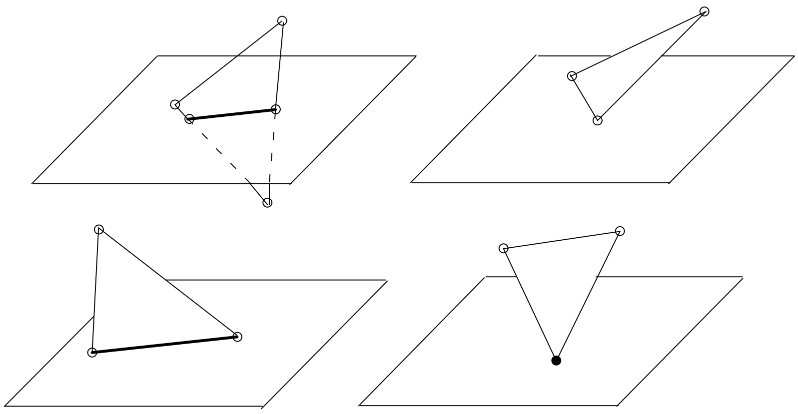
Ukoliko je $P = M$, tj. ako $P \in \alpha$, tada umesto P treba izabrati neku drugu tačku prave p.

Primetimo da nije potrebno odredjivati presečnu tačku M da bi utvrdili da li ona pripada trouglu. Ako smo uslovom (45) utvrdili da prava seče trougao, onda tačku M možemo odrediti kao presek prave p i ravni trougla ABC.

15.8 *Ispitati da li prava $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-4}$ seče trougao ABC, ako je $A(2,4,6)$, $B(-4,2,0)$, $C(6,4,-2)$. U slučaju da seče odrediti koordinate presečne tačke.*

15.0.5 Presek trougla i ravni

Presek ravni i trougla može biti: prazan skup, teme trougla, duž (koja nije ivica trougla), ivica trougla ili trougao može da pripada ravni.



Slika 33: Presek ravni i trougla, razni slučajevi

Jednostavan i efikasan način da se odredi presek ravni i trougla jeste da se svaka ivica trougla preseca sa ravni. Taj algoritam je veoma jednostavan za implementaciju. Navodimo primer.

Primer 15.1 *Odrediti presek trougla ABC i ravni $\alpha : x - y = 0$, ako je $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ i $C(1,2,3)$.*

Rešenje: *Tačka M duži $[AB]$ parametarski se zapisuje sa*

$$M = A + t\,\overrightarrow{AB} \iff M(1-t, 2t, 0),$$

$t \in [0,1]$ pri čemu za $t = 0$ i $t = 1$ dobijamo tačke A i B. Zamenom u jednačinu ravni, dobijamo

$$(1-t) - 2t = 0,$$

odakle je $t = \frac{1}{3} \in [0,1]$. Dakle, postoji presek duži AB i ravni α i to je tačka $P(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0)$.

Sličnim postupkom dobijamo da duž $[AC]$ ne seče α, dok je $[BC] \cap \alpha = \{Q(1,1,\frac{3}{2})\}$.

Dakle presek trougla ABC i ravni α je duž PQ.

15.9 *Odrediti presek trougla ABC i ravni $\alpha : x - y + 2z - 3 = 0$, ako je $A(1,-2,0)$, $B(-1,2,3)$ i $C(2,1,3)$.*

15.10 *Odrediti presek trougla ABC i ravni $\alpha : x - 2y + 2z + 5 = 0$, ako je $A(0,0,0)$, $B(2,2,2)$ i $C(2,1,5)$.*

15.0.6 Presek dva trougla

Da bi se odredio presek dva trougla sasvim zadovoljavajući algoritam je da se traže prodori svake ivice jednog trougla sa drugim trouglom i obrnuto. Postoje algorimi koji su nešto bolji od ovog, ali ne značajno. Naročitu pažnju treba posvetiti analizi raznih slučajeva koji se mogu javiti. Detalji se prepuštaju čitaocu.