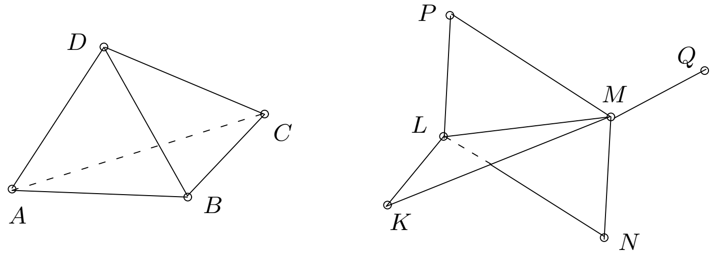
29 Poliedarske površi

Poliedarska površ $\mathcal{M}$ je objekat koji se sastoji od konačno mnogo temena (tačke), ivica (duži) i pljosni (konveksni poligoni) koji zadovoljavaju sledeće uslove:

1. svako teme mora da pripada bar dvema ivicama;
2. svaka ivica je pripada bar jednoj pljosni(ivica ruba), a najviše dvema pljosnima (unutrašnja ivica);
3. presek dve pljosni može biti samo ivica.

Skup temena označavamo sa $\mathcal{T}$, ivica sa $\mathcal{I}$, a pljosni sa $\mathcal{P}$. Podrazumeva se da ivice svih pljosni pripadaju skupu svih ivica, a temena svih ivica, skupu temena. U algoritmima se obično zahteva da pljosnji budu trouglovi. Mi smo u definiciji oslabili taj uslov zato što se konveksni poligoni mogu jednostavno i brzo triangulisati. Primetimo da je konveksni poligon obavezno ravanski.



Slika 34: $ABCD$ jeste, a $KLMNPQ$ nije poligonska površ

Unija svih ivica koje pripadaju samo jednoj pljosni (tj. svih rubnih ivica) naziva se **rub poliedarske površi**. Poliedarsku površ bez ruba zvaćemo **poliedrom**.

Pljosni koje imaju zajedničku ivicu nazivamo **susednim.** Poliedarska površ je **povezana** ako je svake dve njene pljosni moguće povezati nizom susednih pljosni.

Primer 29.1 *Tetraedar $ABCD$ je primer poliedra. Njegove pljosni su $P = \{ABC, ABD, ACD, BCD\}$ ivice $I = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$, a temena $T = \{A, B, C, D\}$.*

Narednu teoremu nećemo dokazivati zbog složenosti dokaza.

Teorema 29.1 *Poliedar razlaže prostor na dve oblasti, (njih zovemo unutrašnjost i spoljašnost).*

29.0.7 Tabela temena i povezanosti

Da bi se algoritmi koji rade sa poliedrima lakše implementirali i bili efikasniji potrebno je podatke o poliedru čuvati u odredjenoj strukturi podataka.

Najjednostavniji način da se zada poliedar jeste da se zada niz temena sa koordinatama, i da se zadaju pljosni indeksima temena. Na primeru jednostavnog tetraedra to bi izgledalo ovako:

Niz temena zovemo T i on je u slučaju tetraedra dužine 4 :

$$T_0 = (0,0,0), \quad T_1 = (1,0,0), \quad T_2 = (0,1,0), \quad T_3 = (0,0,1)$$

Brojevi u zagradama su koordinate temena. Ako koordinate temena nisu zadate, poliedar nazivamo **apstraktni**. Niz pljosni, tj. takozvana **povezanost temena** bi izgledala ovako:

$$P_0 = \langle 1, 2, 3\rangle, \quad P_1 = \langle 0, 2, 3\rangle, \quad P_2 = \langle 0, 1, 3\rangle, \quad P_3 = \langle 0, 1, 2\rangle.$$

To zapravo znači da je pljosan P_0 odredjena temenima T_1, T_2 i T_3 i tako dalje.

U slučaju tetraedra sve pljosni su trouglovi, ali ukoliko poliedarska površ nije triangulisana to mogu biti bilo koji koveksni mnogouglovi. Tada je važno da se temena pljosni navode redom, tj. tako da svaka dva uzastopna čine ivicu.

Iz ovih osnovnih podataka sada se pravi složenija struktura podataka:

- Pravi se lista ivica. Svaka **ivica je struktura** koja pored dva indeksa temena kojima je odredjena sadrži i indekse (jedne ili dve) pljosni kojima pripada.
- Pravi se lista temena. Svako **teme je struktura** koja pored koordinata same tačke sadrži i listu ivica kojima pripada i listu pljosni kojima pripada.
- **Pljosan je takodje struktura**. Ona obično sadrži indekse temena, mada joj se može dodati i lista ivica koje pripadaju toj pljosni.

Strukture Ivica, Teme, Pljosan mogu da sadrže i druge informacije kao što su boja, debljina, tekstura...

Primer 29.2 *a) Da li je* $p_0 = \langle 0, 1, 2\rangle$, $p_1 = \langle 2, 1, 6, 5\rangle$, $p_2 = \langle 2, 5, 4, 3\rangle$, $p_3 = \langle 3, 1, 6, 4\rangle$ *poliedar?*

b) Odrediti skup ivica.

c) Ako je u pitanju poliedar odrediti mu rub i broj komponenata ruba.

Rešenje: S obzirom da koordinate temena $T_0, \ldots, T_6$ nisu date ne možemo proveriti uslov 3) iz definicije poliedra. Kazemo da se radi o **apstraktnom poliedru**. Pri zadavanju tabelom temena i povezanosti, uslov 1) se podrazumeva pa nam preostaje da ispitamo samo uslov 2). Dakle treba odrediti skup ivica i proveriti koliko se puta svaka ivica javlja. Ako se javlja jedanput, to je ivica ruba; ako se javlja dvaput to je unutrašnja ivica; ako se javlja triput onda se ne radi o poliedru.

Oznaka $p_0 = \langle 0, 1, 2\rangle$ znači da su ivice pljosni p_0, upravo T_0T_1, T_1T_2, T_2T_0. Ivice T_0T_1 i T_2T_0 ne nalazimo ni u jednoj drugoj pljosni, pa su to rubne ivice. Ivica T_1T_2 se nalazi i u pljosni p_1, pa je to unutrašnja ivica. Sličnim rezonovanjem dolazimo do skupa ivica (oznake su redukovane)

$$\mathcal{I} = \{01, 12, 20, 16, 65, 52, 54, 43, 32, 31, 64\}$$

od čega su rubne ivice

$$\mathcal{R} = \{01, 20, 65, 54, 32, 31, 64\}.$$

Kako se svaka ivica javlja najviše dva puta, radi se o poliedru.

Da bismo odredili rub, krenimo od prve ivice iz $\mathcal{R}$, ivice 01. Njen kraj je teme T_1. To se teme nalazi i u ivici $31 \in \mathcal{R}$, pa su te dve ivice nadovezane, pa je trenutna rubna linija 013. Teme T_3 se nalazi u ivici 32, pa rubna linija postaje 0132, a teme T_2 se nalazi u ivici 20, pa se rubna linija zatvara, tj. postaje 01320, tj. četvorougao $T_0T_1T_3T_2$ je jedna komponenta ruba. Kako ovim nismo iskoristili sve rubne ivice, ponavljamo postupak od prve neiskorištene ivice 65. Dobijamo da je trougao $T_6T_5T_4$ druga komponenta ruba, tako da rub ima dve komponente.

29.1 *a) Da li sledeća tabela temena i povezanosti zadaje (apstraktni) poliedar?*
$p_0 = \langle 0,1,4\rangle$, $p_1 = \langle 1,2,3,4\rangle$, $p_2 = \langle 3,7,8,4\rangle$, $p_3 = \langle 3,6,5,4\rangle$.
b) Nacrtati!

29.2 *Neka je* $T_1T_2T_3T_4T_0$ *četvorostrana piramida sa vrhom* T_0.
a) Napisati tabelu temena i povezanosti (tj. navesti pljosni piramide).
b) Izvršiti triangulaciju pljosni i napisati odgovarajuću tabelu temena i povezanosti.

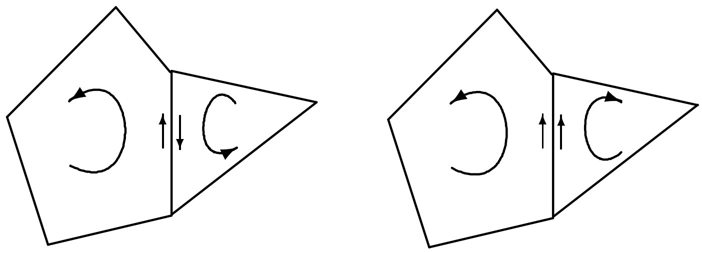
29.3 *Data je poliedarska površ pljosnima* $p_0 = \langle 1,2,3\rangle$, $p_1 = \langle 4,5,6\rangle$, $p_2 = \langle 1,2,4\rangle$, $p_3 = \langle 4,5,2\rangle$, $p_4 = \langle 3,5,2\rangle$, $p_5 = \langle 3,6,5\rangle$. $p_6 = \langle 6,3,1\rangle$, $p_7 = \langle 4,6,1\rangle$.
a) Odrediti joj rub i broj komponenata ruba
b) Skicirati površ (Rešenje: triangulisana trostrana prizma)

29.4 *Data je poliedarska površ pljosnima* $p_0 = \langle 5,6,7\rangle$, $p_1 = \langle 1,3,0\rangle$, $p_2 = \langle 4,0,1,5\rangle$, $p_3 = \langle 6,2,1,5\rangle$, $p_4 = \langle 7,6,2,3\rangle$, $p_5 = \langle 3,0,4,7\rangle$.
a) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.
b) Skicirati površ (Rešenje: Kocka, sa cijih su suprotnih strana isečena dva trougla).

29.0.8 Orjentabilnost poliedarske površi

U matematici se pojam orjentabilnosti smatra teškim. Ipak, na poliedarskim površima orjentacija se jednostavno definiše.

Pretpostavimo da je $\mathcal{M}$ povezana poliedarska površ čije su sve pljosni orjentisani poligoni. Kažemo da **dve pljošni sa zajedničkom ivicom su iste orjentacije**, ako različito orjentišu zajedničku ivicu.



Slika 35: Susedne pljosni iste i različite orjentacije

Definicija 29.1 *Povezana poliedarska površ* $\mathcal{M}$ *je* **orjentabilna** *ako njene pljosni možemo orjentisati tako da su svake dve susedne pljosni iste orjentacije. Ako postoji, takvu orjentaciju svih pljosni zovemo orjentacijom površi i označavamo sa* $\mathcal{O}$.

Dokažimo sada da postoje tačno dve orjentacije orjentabilne površi $\mathcal{M}$.

Neka je p_0 proizvoljna pljosan površi $\mathcal{M}$. Ta pljosan ima dve moguće orjentacije. Ako izaberemo jednu od njih, možemo orjentisati njoj susedne pljosni, a zatim njima susedne itd. i na taj način orjentisati sve pljosni površi. Zahvaljujući orjentabilnosti ovaj proces će ispravno funkcionisati. U zavisnosti od toga da li se izabrana orjentacija pljosni p_0 pokalapala sa njenom orjentacijom u $\mathcal{O}$, ili ne, isto će da važi za orjentaciju svih ostalih pljosni. Dakle, postoje tačno dve orjentacije orjentabilne površi $\mathcal{M}$.

Kod neorjentabilnih poliedarskih površi ovaj proces, koji nazivamo **uskladjivanje orjentacija pljosni**, nije dobro definisan.

Primer 29.3 *Dokažimo da je tetraedar $T_0T_1T_2T_3$ orjentabilna površ.*

Krenimo od orjentacije pljosni $p_0 = \langle 1,2,3\rangle$. Ona ivicu $\langle 2,3\rangle$ (baš na taj način), pa susedna pljosan p_1 mora da ima orjentaciju $p_1 = \langle 3,2,0\rangle$. Opet, pljosan p_0 odredjuje orjentaciju ivice $\langle 3,1\rangle$, pa i njoj susedne pljosni $p_2 = \langle 1,3,0\rangle$. Konačno, Opet, pljosan p_0 odredjuje orjentaciju ivice $\langle 1,2\rangle$, pa i njoj susedne pljosni $p_3 = \langle 2,1,0\rangle$. Na taj način smo orjentisali sve pljosni tetraedra uskladjujući orjentacije na ivicama $\langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,2\rangle$. Potrebno je proveriti da je orjentacija uskladjena i na ivicama $\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle$. Recimo, ivica $\langle 0,1\rangle$ je orentisana kao $\langle 0,1\rangle$ u pljosni p_2, a kao $\langle 1,0\rangle$, što je u redu. Slično se proverava za ivice $\langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle$, pa je tetraedar orjentabilan, a p_0, p_1, p_2, p_3 jedna (od dve) njegove orjentacije.

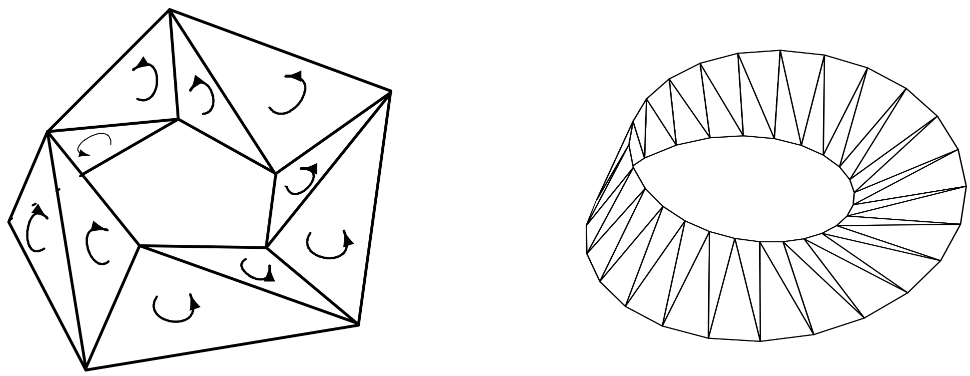
Ovaj primer je zapravo specijalan slučaj jednog mnogo jačeg tvrdjenja.

Teorema 29.2 *Svaki poliedar u prostoru $\mathbb{R}^3$ je orjentabilan.*

Ovu teoremu nećemo dokazivati. Napomenimo da teorema ne važi za apstraktne poliedre, već samo za one koji zadovoljavaju uslov 3) definicije poliedarske površi!

29.5 *Upotrebom prethodne teoreme izvesti da je poliedarska površ iz Zadatka 29.3 orjentabilna.*

Primer 29.4 *Dokažimo da je poliedarski model Mebijusove trake neorjentabilna površ. (radjeno na predavanjima).*



Slika 36: Poliedarski modeli Mebijusove trake sa 10 i 50 trouglova

Na slici 36 su data dva poliedarska modela Mebijusove trake. Za prvi od njih je pokazano da je neorjentabilan, a slično se može pokazati i za drugi.

Nama je intuitivno jasno da će svaki poliedarski model Mebijusove trake biti neorjentabilan, ali to nije lako dokazati. To je cena lake definicije orjentabilnosti poliedarske površi. Naime, može se pokazati da važi sledeća teorema, a mi je navodimo bez dokaza.

Teorema 29.3 *Poliedarski modeli neke glatke površi su ili svi orjentabilni ili svi neorjentabilni.*

Iz te teoreme sledi da je orjentabilnosti osobina površi.

Koristeći ovu teoremu možemo lako videti da su neke poliedarske površi orjentabilne. Recimo, pošto su i tetraedar i kocka poliedarski modeli sfere, a tetraedar je orjentabilan, zaključujemo da je i kocka orjentabilna.

Iskoristimo ovu priliku da uočimo neke interesantne osobine Mebijusove trake:

- Jednostrana je.
- Rub Mebijusove trake je jedna linija.
- Kada je prerežemo uzdužno (po sredini) dobijamo jednu traku, ali dva puta uvrnutu. Kada i tu traku prerežemo dobijamo dve trake, ali ulančane. Proveriti!

29.6 *Data je poliedarska površ pljosnima* $p_0 = \langle 0, 1, 2\rangle$, $p_1 = \langle 3, 0, 2\rangle$, $p_2 = \langle 0, 5, 6\rangle$, $p_3 = \langle 1, 2, 4\rangle$, $p_4 = \langle 6, 7, 4\rangle$, $p_5 = \langle 7, 1, 6\rangle$,$p_6 = \langle 6, 0, 1\rangle$, $p_7 = \langle 4, 6, 5\rangle$,$p_8 = \langle 3, 5, 2\rangle$, $p_9 = \langle 4, 2, 5\rangle$.

a) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.

b) Ako je data orjentacija pljosni $p_0 = \langle 0, 1, 2\rangle$, *izvršiti uskladjivanje orjentacija pljosni. Da li je površ orjentabilna?*

29.7 *Data je poliedarska površ pljosnima* $p_0 = \langle 0, 1, 5, 4\rangle$, $p_1 = \langle 6, 2, 1, 5\rangle$, $p_2 = \langle 4, 3, 7, 0\rangle$, $p_3 = \langle 3, 6, 7\rangle$, $p_4 = \langle 3, 6, 2\rangle$. *a) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.*

b) Izvršiti uskladjivanje orjentacija pljosni. Da li je površ orjentabilna?

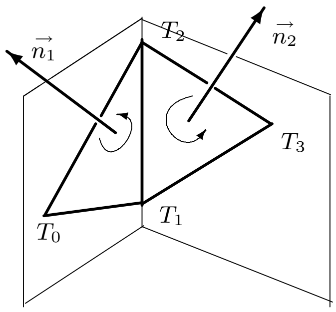
U nastavku, jednostavnosti radi, posmatramo triangulisanu poliedarsku površ sa orjentisanim pljosnima (tj. poredak temena u pljosni je važan). Svakoj pljosni $p_m = T_iT_jT_k = \langle i,j,k\rangle$ pridružujemo orjentisani normalni vektor

$$\overrightarrow{n_m} = \overrightarrow{T_iT_j} \times \overrightarrow{T_iT_k}\ .$$

(ovde je redosled indeksa važan!) Neka su $p_1 = T_0T_1T_2$ i $p_2 = T_3T_2T_1$ dve susedne pljosni poliedarske površi. Poluravni sa rubom T_1T_2 koje sadrže T_0 i T_3 razbijaju prostor na dva diedra. Primetimo da normalni vektori

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{T_0T_1} \times \overrightarrow{T_0T_2}, \qquad \overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{T_3T_2} \times \overrightarrow{T_3T_1}$$

pripadaju istom diedru (reći cemo "su lokalno sa iste strane poliedarske površi") ako i samo ako su te pljosni iste orjentacije.



Slika 37: Normale isto orjentisanih pljosni

Dakle, uslov da je površ orjentabilna, tj. da svake dve susedne pljosni možemo isto orjentisati je ekvivalentna uslovu da pljosnima možemo pridružiti normalne vektore, tako da su svaka dva susedna normalna vektora lokalno sa iste strane površi.

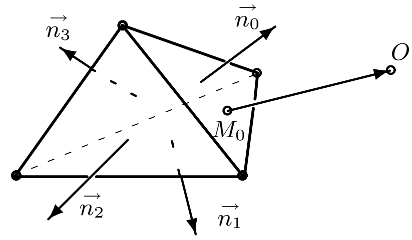
Neka je sada poliedarska površ bez ruba, tj. poliedar. Prema teoremi ona razbija prostor na unutrašnost i spoljašnost. Ako izaberemo normale na pljosni da one pokazuju, recimo, ka spoljašnosti tada će svake dve susedne normale biti sa iste strane površi pa će površ biti orjentabilna. Dakle:

Teorema 29.4 *Svaki poliedar je orjentabilna površ (tj. u prostoru ne postoje neorjentabilne površi bez ruba).*

Podsetimo se da poliedarska površ, pa i poliedar, po definiciji nema samopreseka. Ako dozvolimo sampreseke tada postoje primeri neorjentabilnih poliedara u prostoru. Jedan od njih je Klajnova flaša.

29.0.9 Značaj orjentabilnosti za kompjutersku grafiku

Šta god da radimo sa poligonskom površi, bilo da je projektujemo, osvetljavamo ili transfomišemo, potrebno je razmatrati sve pljosni površi. Tačnije, ne baš sve, već samo one koje su vidljive. Na taj se način postiže mnogo veća efikasnost ako se mogu raspoznati vidljive od nevidljivih pljosni. Upravo to se može uraditi orjentacijom površi.



Slika 38: Odredjivanje vidljivosti uz pomoć normala na pljosni

Prvo treba izabrati orjentaciju površi, tj. izvršiti proces uskladjivanje orjentacija pljosni. Time su i normale $\vec{n_i}$ svih pljosni p_i uskladjene, tj. sve su ili spoljašnje ili unutrašnje.

Neka se za pljosan p_0 zna da je vidljiva iz tačke posmatranja O. Ako za njen normalni vektor $\vec{n_0}$ važi $\vec{n_0} \cdot \overrightarrow{M_0O} < 0$ (gde je M_0 neka tačka te pljosni, može i teme), tj. ako vektor $\vec{n_0}$ pokazuje u pravcu tačke O tada su vidljive samo one pljosni p_i za čiji normalni vektor $\vec{n_i}$ i ma koju tačku $M_i \in p_i$ važi:

$$\vec{n_i} \cdot \overrightarrow{M_iO} < 0.$$

Ako je $\vec{n_0} \cdot \overrightarrow{M_0O} > 0$ onda i u prethodnoj formuli treba da stoji suprotan znak nejednakosti.

Pored vidljivosti, orjentacija tj. izbor spoljašnje normale je važan i za druge primene. Recimo, kada želimo da odredimo da li se tačka nalazi unutar konveksnog poliedra. Čitaocu se ostavlja da razmisli o algoritmu koji rešava taj problem.

29.1 Ojlerova karakteristika površi

Definicija 29.2 Ojlerova karakteristika poliedarske površi $\mathcal{M}$ *je broj*

$$\xi(\mathcal{M}) = T - I + P,$$

gde su T, I i P redom brojevi temena, ivica i pljosni te poliedarske površi.

Nije teško pokazati da se ovaj broj ne menja ako izvršimo triangualciju poliedarske površi. Mnogo teže i važnije tvrdjenje je dato sledećom teoremom koju nećemo dokazati.

Teorema 29.5 *Svake dva poliedarska modela glatke površi imaju jednake Ojlerove karakteristike.*

Dakle, kao i orjentabilnost i Ojlerova karakteristika je osobina površi, a ne njenog konkretnog poliedarskog modela.

Ojlerova karakteristika opisuje neke važne geometrijske osobine površi koje ćemo sada samo intuitivno objasniti i dati bez dokaza.

1) Ako je $\mathcal{M}$ poliedar i r rod poliedra (on se intuitivno definiše kao "broj rupa") tada važi:

$$\xi(\mathcal{M}) = 2 - 2r.$$

Recimo rod modela sfere, kao što su tetraedar, kocka je jednak 0 jer oni nemaju rupa. Odatle je $\xi(\mathcal{M}) = 2$ kad god je površ reda nula.

Ako je $\mathcal{M}$ model torusa tada je $\xi(\mathcal{M}) = 0$, jer torus ima jednu rupu, tj. $r = 1$.

2) Ako je $\mathcal{M}$ orjentabilna površ sa rubom iz jednog komada (recimo model polusfere) tada je $\xi(\mathcal{M}) = 1$.

Ojlerova karakteristika je značajna jer kada su napravi tabela temena i povezanosti za neku površ, računanje Ojlerove karakteristike može biti potvrda da je tabela konzistentno napravljena.

29.2 Platonova tela

Topološki pravilnim poliedrom zovemo poliedar nultog roda čije su sve pljosni poligoni sa q ivica, a svako u svakom temenu se sustiče jednak broj p ivica. Ako još zahtevamo da su sve te ivice jednake dužine onda takav poliedar zovemo **pravilan poliedar** ili **Platonovo telo**.

Teorema 29.6 *Postoji tačno pet topološki pravilnih poliedara.*

Označimo sa T, I i P redom brojevi temena, ivica i pljosni poliedra. Kako je poliedar roda nula važi

$$T - I + P = 2. \tag{48}$$

Pošto je svaka pljosan poligon sa q ivica i svaka ivica je zajednička za dve pljosni važi $Pq = 2I$. Pošto se u svakom temenu sustiče p ivica, a svaka ivica ima dva temena važi $Tp = 2I$. Zamenimo li te dve relacije u (48) nakon deljenja sa $2I$ dobijamo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{I} > \frac{1}{2}. \tag{49}$$

Jedina celobrojna rešenja (p, q) za $p, q > 2$ te nejednačine su:

$$(3,3), \quad (3,4), \quad (4,3), \quad (3,5), \quad (5,3).$$

Njima odgovaraju poliedri koje zovemo tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar, a čije su osobine date u tabeli. Ti poliedri zaista postoje. Koordinate njihovih temena i povezanost dati su u Dodatku. □

poliedar	p	q	T	I	P
tetraedar	3	3	4	6	4
kocka	3	4	8	12	6
oktaedar	4	3	6	12	8
dodekaedar	3	5	20	30	12
ikosaedar	5	3	12	30	20

29.3 Zadaci

29.8 *Date su susedne pljosni $p_0 = \langle 0,1,2\rangle$, $p_1 = \langle 2,0,3\rangle$ neke površi. Ako su koordinate temena $T_0(1,0,-1)$, $T_1 = (0,0,2)$, $T_2 = (1,2,0)$, $T_3(0,0,0)$, odrediti jednične normale tih pljosni koje su lokalno sa iste strane.*

29.9 *Dat je tetraedar $ABCD$ temenima $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ i $D(0,0,1)$. Odrediti spoljašnje (ili unutrašnje) normale svih pljosni tetraedra.*

29.10 *Data je poliedarska površ $p_0 = \langle\rangle$, $p_0 = \langle 0,1,4,3\rangle$, $p_1 = \langle 1,2,5,4\rangle$, $p_2 = \langle 2,0,3,5\rangle$, $p_3 = \langle 6,8,5,3\rangle$, $p_4 = \langle 6,3,4,7\rangle$, $p_5 = \langle 4,5,8,7\rangle$, $p_6 = \langle 8,7,1,2\rangle$, $p_7 = \langle 0,1,7,6\rangle$, $p_8 = \langle 0,6,8,2\rangle$.*

a) Dokazati da je ona poliedar, tj. da nema rub.

b) Izračunati njenu Ojlerovu karakterisku i broj rupa.

29.11 *Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake.*

29.12 *Koristeći relaciju (49) i* $Pq = 2I$, $Tp = 2I$ *proveriti da se za pet rešenja* (p, q) *zaista dobijaju vrednosti brojeva ivica, plosni i temena* I, P, T *date u tablici Platonovih tela.*