Zadaci iz Geometrije (I smer, druga godina)

Srdjan Vukmrović

decembar 2009.

1 Vektori. Koordinate. Vektorska algebra

1.1 (*) *U odnosu na tačku* O *dati su vektori položaja* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ *tačaka* A *i* B $(A \neq B)$. *Izraziti vektor položaja tačke* C *takve da*

a) $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$;

b) tačka C *deli duž* AB *u odnosu* $p : q, \;\; p, q \in \mathbb{N}$.

1.2 (*) *Neka je* ABC *trougao i tačka* T *takva da važi* $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

a) Dokazati da tačka T *ne zavisi od izbora tačke* O.

b) Dokažati da je tačka O *težište trougla, tj. presek težišnih duži i da ona tetežišne duži deli u odnosu* $2 : 1$.

1.3 *Dati su vektori* $\overrightarrow{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ *i* $\overrightarrow{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ *iz* $\mathbb{V}^3$ *svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a)* $|\overrightarrow{v}|$; *b)* $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.

1.4 (*) *a) Dokazati da simetrala ugla u trouglu* ABC *deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana. b) Ako je* A_1 *presek simetrale ugla* $\angle BAC$ *i ivice* BC, *odrediti vektor* $\overrightarrow{AA_1}$ *preko vektora* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{AC}$.

1.5 (*) *Neka je* A' *podnožje visine iz temena* A *trougla* ABC. *Odrediti vektor* $\overrightarrow{AA'}$ *preko vektora ivica* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{AC}$.

1.6 (*) *Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).*

1.7 *Odrediti površinu trougla odredjenog* ABC, *ako je* $A(1,2)$, $B(2,3)$, $C(-3,4)$.

1.8 *a) Odrediti mešoviti proizvod* $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$, *ako su njihove koordinate u ortonormiranoj bazi* $\overrightarrow{a} = (1,2,-7)$, $\overrightarrow{b} = (-1,3,3)$, $\overrightarrow{c} = (-1,8,-1)$.

b) Da li su ti vektori linearno nezavisni.

1.9 *Data je kocka* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *ivice* 1. *a) Odrediti ugao izmedju dijagonala strana kocke* BC_1 *i* D_1B_1. *b) Odrediti zapreminu tetraedra* BC_1B_1D.

1.10 *Dat je pravilan šestougao* $ABCDEF$. *Ako je data baza* $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, $\vec{e_1}=\vec{AB}, \vec{e_2}=\vec{AF}$, *odrediti koordinate temena šestougla u reperu* $A\,\vec{e_1}\vec{e_2}$.

1.11 *Težište trougla* OAB *je tačka* O'. *U ravni trougla izabrana su dva koordinatna sistema: sistem* Oxy *sa početkom u tački* O *i koordinatnim vektorima* $\vec{e_1}=\vec{OA}$ *i* $\vec{e_2}=\vec{OB}$ *i sistem* $O'x'y'$ *sa početkom u tački* O' *i koordinatnim vektorima* $\vec{f_1}=\vec{O'A}$ *i* $\vec{f_2}=\vec{O'B}$. *Odrediti formule transformacija i koordinate središta stranica trougla* OAB *u oba sistema.*

1.12 *Dat je tetraedar* $OABC$. *Koordinatni sistem* $Oxyz$ *ima početak u temenu* O, *a koordinatni vektori su* $\vec{e_1}=\vec{OA}, \vec{e_2}=\vec{OB}$ *i* $\vec{e_3}=\vec{OC}$. *Koordinatni sistem* $Ax'y'z'$ *ima početak u temenu* A *tetraedra, a njegovi koordinatni vektori su* $\vec{f_1}=\vec{AD}, \vec{f_2}=\vec{AE}$ *i* $\vec{f_3}=\vec{AF}$, *gde su* D, E *i* F *središta ivica* BC, OA *i* AB. *Odrediti formule transformacija i koordinate temena tetraedra u odnosu na sistem* $Ax'y'z'$.

1.13 *Da li formule*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

prestavljaju transformaciju koordinata izmedju dva ortonormirana repera? Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.

2 Afina preslikavanja ravni

2.1 *Dato je afino preslikavanje formulama*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Odrediti formule inverznog preslikavanja.

2.2 *Odrediti formule homotetije sa centrom u tački* $C(1, 2)$ *i koeficientom* 3. *U koju tačku se preslikava koordinatni početak pri ovoj homotetiji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku:* $x' = ..., y' = ...$*)*

2.3 *Odrediti formule rotacije za ugao* $\phi = \frac{7\pi}{6}$ *oko tačke* $A(-2, 3)$. *U koju tačku se preslikava tačka* $M(1, 3)$ *pri ovoj rotaciji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku:* $x' = ..., y' = ...$*)*

3 Linearna analitička geometrija u ravni

3.1 *Data je prava* $q : x = -t + 4, y = 2t - 7, t \in \mathbb{R}$. *a) Odrediti implicitni oblik prave* q. *b) Odrediti implicitni oblik prave* r *koja sadrži tačku* $R(3, 7)$ *i paralelna je* q.

3.2 *Odrediti jednačinu normale n iz tačke* $A(1,7)$ *na pravu p ako je a)* $p : x = 2t+4, y = 3t-5, t \in \mathbb{R}$ *b)* $p : 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0$.

3.3 *Neka je* $A(2,3), B(-1,4)$. *a) Odrediti parametarsku jednačinu prave* AB. *b) Ispitati da li tačka* $C(14,-1)$ *polupravoj* $[AB)$. *c) Ispitati da li tačka* $D(1, \frac{10}{3})$ *i u kom odnosu ona deli duž* AB.

3.4 *Ispitati da li tačke* $C(1,1)$ *i* $D(-7,11)$ *pripadaju istoj poluravni odredjenoj pravom* AB, $A(2,-2), B(1,3)$.

3.5 *Ako je* $A(1,2), B(3,7)$, *odrediti koordinate tačaka koje dele duž* AB *na pet jednakih delova.*

3.6 *Ispitati da li tačka* $M(2,3)$ *pripada trouglu* ABC, *ako je* $A(1,7)$, $B(-3,3)$, $C(3,-3)$*?*

3.7 *Izračunati rastojanje tačke* $M(1,-3)$ *od prave a)* $2x-3y+1=0$, *b) prave p čiji je vektor pravca* $\overrightarrow{p} = (1,-2)$, *a tačka* $P(1,0)$.

3.8 *Odrediti centar i poluprečnik opisanog kruga u trougao* ABC, *ako je* $A(1,2), B(4,3), C(6,0)$ *kao i koordinate težišta trougla.*

3.9 *Odrediti presek pravih p i q koje su zadate tačkom i vektorom pravca:*
a) $P(3,1), \overrightarrow{p} = (1,0), Q(2,3), \overrightarrow{q} = (1,1)$;
b) $P(3,1), \overrightarrow{p} = (1,0), Q(2,3), \overrightarrow{q} = (-2,0)$;
c) $P(3,1), \overrightarrow{p} = (1,-2), Q(2,3), \overrightarrow{q} = (-2,4)$.

3.10 *Odrediti centar i poluprečnik kruga* $k : x^2+y^2-2x+4y-11=0$.

3.11 *Odrediti presek kruga k iz prethodnog zadatka i prave:*
a) $p : \overrightarrow{p} = (1,1), \quad P(2,-2)$
b) $q : x-y-4=0$.

4 Krive u ravni

4.1 *a) Odrediti parametrizaciju kruga* $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ *b) Pokazati da tačka* $A(0,-3)$ *pripada tom krugu. c) Odrediti tangentni vektor i jednačinu tangente kruga u tački* A.

4.2 (*) *Svesti krivu drugog reda* $2x^2+3xy-2y^2+4x+3y-7=0$ *na kanonski oblik izometrijskom transformacijom. O kojoj krivoj se radi?*

4.3 *Svesti na kanonski oblik rotacijom: a)* $2x^2+3xy-2y^2-7=0$ *b)* $x^2+y^2-xy+1=0$

4.4 *Svesti na kanonski oblik translacijom: a)* $x^2-3y^2-4x-18y-23=0$ *b)* $3y^2+6y-x-1=0$ *c)* $x^2+5y^2-4x-10y+8=0$.

4.5 *a) Odrediti Bezierovu krivu čije su kontrolne tačke* $P_0(1,1)$, $P_1(2,2)$, $P_2(3,1)$, $P_3(4,-1)$. *b) Odrediti tačku* M *za* $t = \frac{1}{2}$ *i tangentni vektor krive u toj tački.*

5 Prava i ravan u prostoru

5.1 *Ravni* $x - y - 2 = 0$ *odrediti parametarski jednačinu.*

5.2 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke* $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, -1)$ *i* $C(0, 0, 1)$.

5.3 *Data je ravan* $\alpha : x + 2y + 2z - 1 = 0$ *i u njoj tačka* $C(3, 1, -2)$. *Odrediti parametrizaciju kruga poluprečnika* $r = 2$ *sa centrom* C *koji pripada ravni* α.

5.4 *Odrediti ortonormirani koordinatni sistem* (x', y', z') *u odnosu na ravan* $x - y - 2 = 0$ *i napisati vezu tih koordinata sa koordinatama* (x, y, z).

5.5 *Pravu* $p : x = t + 4, y = -2t + 1, z = 3t - 2, t \in \mathbb{R}$ *zapisati kao presek dve ravni.*

5.6 *Odrediti jednačinu ravni* α *koja sadrži pravu* $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ *i koja je normalna na ravan* $\beta : y = 0$.

5.7 *Pravu* $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$ *zapisati parametarski.*

5.8 *Odrediti rastojanje tačke* $M(1, 0, 12)$ *od prave* $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

5.9 *Odrediti rastojanje tačke* $M(1, 0, 12)$ *od ravni* $\alpha : x - y - 4z = 0$.

5.10 *Odrediti jednačinu ravni* α *koja sadrži pravu* $p : x = 4t - 2, y = t + 2, z = -2t - 2$, *i čije je rastojanje od tačke* $M(3, 2, 1)$ *jednako* $\sqrt{14}$.

5.11 *Odrediti jednačinu ravni* α *koja sadrži pravu* $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ *i čije je rastojanje od tačke* $M(1, 1, 1)$ *jednako* $\frac{5}{\sqrt{14}}$. *(Jedno rešenje:* $3x - y + 2z + 1 = 0$*)*

5.12 *Odrediti medjusobni položaj pravih (i presečnu tačku ako postoji) pravih:*

$$a)\quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : 2x = y, 3x = z$$

$$b)\quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$

$$b)\quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$$

5.13 *Odrediti zajedničku normalu i rastojanje izmedju mimoilaznih pravih* $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ *i* $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

5.14 *Odrediti rastojanje izmedju mimoilaznih pravih*

$$p : \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0} \qquad q : \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5.}$$

5.15 *Izračunati (koristeći digitron za* arccos*) ugao ravni* $\alpha : x + 2y - 3z - 1 = 0$ *i* $\beta : 2x - 3y + 4z + 2 = 0$.

5.16 *Odrediti ravan* α *koja sadrži tačku* $M(1,-1,1)$*, paralelna je pravoj* $p: x+z=0, x+2y-2=0$*, a sa ravni* $\beta: 4x+y-z+2=0$ *gradi ugao od* $\frac{\pi}{4}$.

5.17 *Izračunati (koristeći digitron za* arccos*) ugao izmedju prave* $p: x+2y-3z-1=0, x-z+2=0$ *i ravni* $\alpha: x-4y+2z+2=0$.

5.18 *Odrediti jednačinu normale iz tačke* $A(2,3,-1)$ *na ravan* $\alpha: 2x+y-4z+5=0$.

5.19 *Odrediti tačku* Q *koja je simetrična tački* $P(3,-2,-4)$ *u odnosu na ravan* $\alpha: 6x+2y-3z-75=0$ *kao i projekciju* P' *tačke* P *na ravan* α.

5.20 *Odrediti tačku* Q *koja je simetrična tački* $P(-1,-2,1)$ *u odnosu na pravu* $l: \frac{x}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{1}$ *kao i projekciju* P' *tačke* P *na pravu* l.

5.21 *Odrediti* λ *tako da se prave* $p: \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-1}{-2}$ *i* $q: \frac{x-\lambda}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{0}$ *seku. Koje su koordinate presečne tačke?*

5.22 *Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku* $L(2,-1,7)$ *i seče prave* $p: \frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{1}$ *i* $q: \frac{x-7}{-1}=\frac{y-11}{-3}=\frac{z+2}{0}$.

5.23 *Ispitati da li prava* $p: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-6}=\frac{z+1}{-4}$ *seče trougao* ABC*, ako je* $A(2,4,6)$*,* $B(-4,2,0)$*,* $C(6,4,-2)$*. U slučaju da seče odrediti koordinate presečne tačke.*

5.24 *Odrediti presek trougla* ABC *i ravni* $\alpha: x-y+2z-3=0$*, ako je* $A(1,-2,0)$*,* $B(-1,2,3)$ *i* $C(2,1,3)$.

6 Poliedarske površi

6.1 *a) Iz tabele povezanosti odrediti skup ivica. b) Nacrtati sliku. c) Proveriti da li ta tabela povezanosti zadaje apstraktnu poliedarsku površ. d) U slučaju potvrdnog odgovora pod c) proveriti da li je ta poliedarska površ povezana. e) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.*

za sledeće tabele povezanosti: i) $\mathcal{T}=\{T_0,T_1,T_2,T_3,T_4,T_5\}$*,* $\mathcal{P}=\{p_0,p_1,p_2,p_3\}$*,* $p_0=\langle 0,1,2\rangle$*,* $p_1=\langle 0,2,4,5\rangle$*,* $p_2=\langle 3,2,0\rangle$*,* $p_3=\langle 1,0,3\rangle$.

ii) $\mathcal{T}=\{T_0,T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6,T_7,T_8,T_9,T_{10}\}$*,* $\mathcal{P}=\{p_0,p_1,p_2,p_3,p_4\}$*,* $p_0=\langle 0,1,7,4\rangle$*,* $p_1=\langle 1,2,6,7\rangle$*,* $p_2=\langle 2,3,5,6\rangle$*,* $p_3=\langle 3,0,4,5\rangle$*,* $p_4=\langle 8,9,10\rangle$.

6.2 *a) Nacrtati poliedarski model Mebijusove trake i napisati mu tabelu povezanosti. b) Dokazati da je Mebijusova traka neorjentabilna.*

6.3 *Izvršiti uskladjivanje orjentacija pljosni kocke* $ABCDA_1B_1C_1D_1$*, ako je izabrana orjentacija pljosni* $p_0=\langle A,B,C,D\rangle$.

6.4 *Date su susedne pljosni* $p_0=\langle 0,1,2\rangle$*,* $p_1=\langle 2,0,3\rangle$ *neke površi. Ako je* $T_0(1,0,-1)$*,* $T_1=(0,0,2)$*,* $T_2=(1,2,0)$*,* $T_3(0,0,0)$*, odrediti jednične normale tih pljosni koje su lokalno sa iste strane.*

6.5 *Dat je tetraedar $ABCD$ temenima $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ i $D(0,0,1)$. Odrediti spoljašnje (ili unutrašnje) normale svih pljosni tetraedra.*

6.6 *Data je poliedarska površ $p_0 = \langle\rangle$, $p_0 = \langle 0,1,4,3\rangle$, $p_1 = \langle 1,2,5,4\rangle$, $p_2 = \langle 2,0,3,5\rangle$, $p_3 = \langle 6,8,5,3\rangle$, $p_4 = \langle 6,3,4,7\rangle$, $p_5 = \langle 4,5,8,7\rangle$, $p_6 = \langle 8,7,1,2\rangle$, $p_7 = \langle 0,1,7,6\rangle$, $p_8 = \langle 0,6,8,2\rangle$.*

a) Dokazati da je ona poliedar, tj. da nema rub.

b) Izračunati njenu Ojlerovu karakterisku i broj rupa.

6.7 *Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake.*

7 Zadaci za vežbu

7.1 *Dat je kvadrat $ABCD$, čije je središte S. Ako je data baza $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, $\vec{e_1}=\vec{AS}, \vec{e_2}=\vec{AD}$, odrediti koordinate tačaka A, B, C, D, S u reperu Ae.*

7.2 *Odrediti zapreminu tetraedra čija su temena $A(1,0,0)$, $B(3,4,6)$, $C(0,1,0)$, $D(1,1,3)$. (Rešenje: $V = \frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 2$.)*

7.3 *Odrediti bar tri tačke koje pripadaju unutrašnjosti trougla sa temenima $A(1,4)$, $B(6,5)$, $C(4,6)$.*

7.4 *Odrediti formule homotetije sa centrom $C(3,-2)$ i koeficientom -5. U koju tačku se preslikava tačka $X(3,-2)$ pri ovoj homotetiji. (Rešenje: Pošto je $X = C$, tačka X se slika u sebe, tj. $X'(3,-2)$. Proveriti.)*

7.5 *Odrediti podnožje normale iz tačke $A(1,3)$ na pravoj $p : 2x - 2y - 4 = 0$. (Rešenje: tačka $(3,1)$.)*

7.6 *Odrediti presek pravih AB i CD, gde je $A(12,3), B(12,5), C(5,7), D(-2,1)$. (Rešenje: tačka $(12,13)$.)*

7.7 *Dat je trougao ABC, $A(3,5), B(5,3), C(9,3)$. Odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla, kao i jednačinu opisanog kruga. (Rešenje: $r = 4, C(7,7)$.)*

7.8 *a) Da li je trougao ABC iz prethodnog zadatka pozitivne orjentacije?*

b) Da li centar kruga pripada trouglu iz prethodnog zadatka.

(Rešenje: a) da b) ne.)

7.9 *Odrediti presek prave $p : x+y-8 = 0$ i kruga $k : x^2+y^2-6x-6y+14 = 0$. (Rešenje: tačke $(3,5)$ i $(5,3)$.)*

7.10 *Date su tačke $A_1(1,7)$, $A_2(-3,3)$, $A_3(3,-3)$. a) Odrediti Bezijerovu krivu stepena 2 čije su to kontrolne tačke. b) Odrediti tačku M koja se dobija za $t = \frac{1}{3}$ kao i jednačinu tangente u toj tački.*

7.11 *Svesti krive na kanonski oblik izometrijskom transformacijom i odrediti o kojoj se krivoj radi: a)* $y^2 - 6y - 6x - 3 = 0$*, b)* $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$*, c)* $-5x^2 + 6\sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$*. (Rešenje: parabola, tačka, hiperbola.)*

7.12 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku* $M(-1, 0, 3)$ *i normalna je na pravu* $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

7.13 *Odrediti jedančinu ravni koja sadrži pravu* $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ *i normalna je na ravan* $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.

7.14 *Odrediti presek trougla* ABC *i ravni* $\alpha : x - 2y + 2z + 5 = 0$*, ako je* $A(0, 0, 0)$, $B(2, 2, 2)$ *i* $C(2, 1, 5)$.

7.15 *Odrediti pravu* l *koja je paralelna ravni* $\alpha : 4x - y + 2z - 5 = 0$ *i koja seče pravu* $p : \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

7.16 *Data je poliedarska površ* $p_0 = \langle 0, 1, 2\rangle$, $p_1 = \langle 5, 0, 2\rangle$, $p_2 = \langle 0, 3, 4\rangle$, $p_3 = \langle 1, 2, 3\rangle$, $p_4 = \langle 1, 3, 4\rangle$, $p_5 = \langle 0, 4, 5\rangle$.

a) Odrediti rub te poliedarske površi. Koliko on ima komponenata?

b) Uraditi uskladjivanje orjentacija pljosni. Da li je površ orjentabilna?