

Pitanja iz geometrije (I smer, druga godina)

Srdjan Vukmirović

oktobar 2011.

1 Teorijska pitanja

definicija vektora, kolinearni i komplanarni vektori, definicija sabiranja vektora, definicija množenja vektora brojem, dokaz da su svaka tri vektora ravni linearno zavisna, definicija koordinata vektora, definicija koordinata tačaka, definisati težište trougla i nacrtati sliku, navesti f-lu za težište n -tačaka,

definicija skalarnog proizvoda, definicija ortonormirane baze, izvodjenje f-le za skalarni proizvod u ON bazi ravni,

definicija vektorskog proizvoda, tablica vektorskog proizvoda u ON bazi, izvodjenje f-le za vektorski proizvod u ON bazi, uslov da tačka M pripada trouglu ABC ,

definicija mešovitoeg proizvoda, dokaz da je apsolutna vrednost mešovitoeg proizvoda jednaka zapremini paralelepipeda, f-la za računanje mešovitoeg proizvoda (determinanta), uslov komplanarnosti tri vektora, uslov komplanarnosti četiri tačke

napisati opšte f-le za transformacija koordinata tačaka i objasniti šta je šta, napisati matricu rotacije za ugao ϕ u ravni, dva oblika f-la za transformaciju koordinata ON repera i koji oblik šta predstavlja, napisati opšte f-le za afino preslikavanje ravni i objasniti šta je šta, matrično predstavljanje afinoeg preslikavanja ravni 3×3 matricom, navesti osobine afinih preslikavanja, šta je slika trougla (kvadrata, paralelograma, kruga) pri afinom preslikavanju, da li afinom preslikavanje možemo preslikati kvadrat u paralelogram (trougao u četvorougao, trougao u proizvoljan trougao, paralelogram u trapez)

napisati parametarsku jednačinu prave p , napisati parametarsku jednačinu duži AB , izvodjene formula za presek dve prave date tačkom i vektorom pravca, napisati dve f-le za rastojanje tačke od prave

definicija poligonske linije i poligona, definicija proste poligonske linije (nacrtati primer proste i ne-proste), uslov da tačka pripada unutrašnjosti (nacrtati primer), definisati triangulaciju poligona, dokaz da svaki prost poligon sa više od 3 temena ima unutrašnju dijagonalu, formulacija i dokaz teoreme da se svaki poligon p može triangulisati sa $n - 2$ trougla (n je broj temena poligona p), definicija konveksnog skupa (nacrtati primer konveksnog i nekonveksnog), šta je konveksni omotač nekog skupa (nacrtati primer), šta je konveksni omotač

skupa od n tačaka ravni (nacrtati primer), opisati algoritam reda $O(n^3)$ za određivanje konveksnog omotača,

napisati implicitnu i parametarsku jednačinu kruga poluprečnika r sa centrom u $C(x_0, y_0)$, napisati kanonsku jednačinu i parametrizaciju elipse (parabole, hiperbole), navesti i nacrtati optičku osobinu elipse (parabole, hiperbole), napisati opšti oblik krive drugog reda, napisati sve kanonske oblike krivih drugog reda (i imena tih krivih),

napisati definiciju Beizijerove krive stepana n (stepena 2, stepena 3), skicirati Beizijerove krive stepena 2 i 3 i njihove kontrolne tačke, navesti osobine Beizijerovih krivih, nacrtati De Casteljau algoritam za krivu stepena 3 ili 4 i neko $t \in [0, 1]$ (recimo $t = 0.3$, $t=0.5 \dots$),

šta predstavlja jednačina $x^2 + y^2 = 1$ u prostoru, a šta jednačine $x^2 + y^2 = 1, z = 4$, napisati formule afinog preslikavanja prostora i njegovo predstavljanje matricom 4×4 , koji uslov zadovoljava matrica izometrije (kretanja), napisati matrice rotacija oko koordinatnih osa u prostoru, formulisati Ojlerovu teoremu od dekompoziciji izometrije prostora,

napisati jednačinu ravni u prostoru, šta je i kako se određuje koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni α , napisati parametarsku (kanonsku) jednačinu prave u prostoru, napisati formulu za rastojanje tačke od ravni, navesti i nacrtati međusobne položaje dve ravni u prostoru, navesti, nacrtati i napisati uslove u terminima $\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}$ za međusobne položaje dve prave p i q u prostoru, navesti i nacrtati međusobne položaje prave i ravni u prostoru, šta su mimoilazne prave, navesti teoremu o normali mimoilaznih pravih (treba reći i šta je zajednička normala), formula za ugao između dve prave (dve ravni, prave i ravni), kako se određuje presek prave i trougla, izvesti formule centralnog projektovanja iz tačke $O(0, 0, 0)$ na ravan $z = f$

definicija poliedarske površi, definicija ruba poliedarske površi, napisati tabelu povezanosti za kocku, definisati orjentabilnost poliedarske površi, dokazati da je kocka orjentabilna, skicirati glatku Mebijusovu traku i njen poliedarski model, napisati tabelu povezanosti Mebijusove trake, dokazati da Mebijusova traka nije orjentabilna, nacrtati torus i njegov poliedarski model, definicija Ojlerove karakteristike, skicirati glatke površi roda 0, 1 i 2, definisati Platonovo telo, nabrojati Platonova tela, dokazati da postoji tačno 5 Platonovih tela.

2 Vektori

2.1 (*) Dokazati da je $\vec{AB} = \vec{CD}$ ako i samo ako se duži AD i BC polove.

2.2 (*) U odnosu na tačku O dati su vektori položaja \vec{OA}, \vec{OB} tačaka A i B ($A \neq B$). Izraziti vektor položaja tačke C takve da $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$.

2.3 Dati su vektori $\vec{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ i $\vec{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ iz \mathbb{V}^3 svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a) $|\vec{v}|$; b) $\angle(\vec{v}, \vec{u})$.

2.4 (*) a) Ako je A_1 presek simetrale ugla $\angle BAC$ i ivice BC trougla ABC , odrediti vektor $\vec{AA_1}$ preko vektora \vec{AB} i \vec{AC} . b) Dokazati da simetrala ugla u trouglu ABC deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana.

2.5 (*) Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).

2.6 Odrediti površinu trougla ABC , ako je $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(-3, 4)$. Da li je trougao ABC pozitivne orijentacije?

2.7 a) Odrediti mešoviti proizvod $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$, ako su njihove koordinate u ortonormiranoj bazi $\vec{a} = (1, 2, -7)$, $\vec{b} = (-1, 3, 3)$, $\vec{c} = (-1, 8, -1)$.

b) Da li su ti vektori linearno nezavisni.

2.8 a) Da li su tačke $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(7, 6)$ kolinearne?

b) Da li su tačke $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(7, -6, 5)$, $D(5, -8, 3)$ komplanarne?

2.9 Data je kocka $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ivice 1. a) Odrediti ugao između dijagonala strana kocke BC_1 i $D_1 B_1$. b) Odrediti zapreminu tetraedra $BC_1 B_1 D$.

2.10 Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$. Ako je data baza $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AF}$, odrediti koordinate temena šestougla u reperu $A \vec{e}_1 \vec{e}_2$.

2.11 Neka je $OABC$ paralelogram i $e = (\vec{OA}, \vec{OC})$, $f = (\frac{1}{2} \vec{BO}, \vec{BC})$ dve baze. Odrediti formule transformacija koordinata u reperima Oe i Bf , kao i inverzne formule.

2.12 Da li formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

prestavljaju transformaciju koordinata između dva ortonormirana repera? Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.

3 Afina preslikavanja ravni

3.1 Date su tačke $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$; $A'(4, 5)$, $B'(8, 7)$, $C'(6, 9)$, $D'(2, 7)$. a) Odrediti jednačine afinog preslikavanja koje kvadrat $ABCD$ preslikava u paralelogram $A'B'C'D'$. b) Izračunati površinu paralelograma, koristeći determinantu matrice dobijenog preslikavanja i površinu kvadrata.

3.2 Dato je afino preslikavanje formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Odrediti formule inverznog preslikavanja.

3.3 Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $C(1, 2)$ i koeficijentom 3. U koju tačku se preslikava koordinatni početak pri ovoj homotetiji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku: $x' = \dots$, $y' = \dots$)

3.4 Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{7\pi}{6}$ oko tačke $A(-2, 3)$. U koju tačku se preslikava tačka $M(1, 3)$ pri ovoj rotaciji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku: $x' = \dots$, $y' = \dots$)

4 Analitička geometrija u ravni

4.1 Data je prava $q : x = -t + 4, y = 2t - 7, t \in \mathbb{R}$. a) Odrediti implicitni oblik prave q . b) Odrediti implicitni oblik prave r koja sadrži tačku $R(3, 7)$ i paralelna je q .

4.2 Odrediti jednačinu normale n iz tačke $A(1, 7)$ na pravu p ako je a) $p : x = 2t + 4, y = 3t - 5, t \in \mathbb{R}$ b) $p : 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0$.

4.3 Neka je $A(2, 3), B(-1, 4)$. a) Odrediti parametarsku jednačinu prave AB . b) Ispitati da li tačka $C(14, -1)$ polupravoj $[AB)$. c) Ispitati da li tačka $D(1, \frac{10}{3})$ i u kom odnosu ona deli duž AB .

4.4 Ispitati da li tačke $C(1, 1)$ i $D(-7, 11)$ pripadaju istoj poluravni odredjenoj pravom $AB, A(2, -2), B(1, 3)$.

4.5 Ako je $A(1, 2), B(3, 7)$, odrediti koordinate tačaka koje dele duž AB na pet jednakih delova.

4.6 Ispitati da li tačka $M(2, 3)$ pripada trouglu ABC , ako je $A(1, 7), B(-3, 3), C(3, -3)$?

4.7 Izračunati rastojanje tačke $M(1, -3)$ od prave a) $2x - 3y + 1 = 0$, b) prave p čiji je vektor pravca $\vec{p} = (1, -2)$, a tačka $P(1, 0)$.

4.8 Odrediti centar i poluprečnik opisanog kruga u trougao ABC , ako je $A(1, 2), B(4, 3), C(6, 0)$ kao i koordinate težišta trougla.

4.9 Odrediti presek pravih p i q koje su zadate tačkom i vektorom pravca:

- a) $P(3, 1), \vec{p} = (1, 0), Q(2, 3), \vec{q} = (1, 1)$;
- b) $P(3, 1), \vec{p} = (1, 0), Q(2, 3), \vec{q} = (-2, 0)$;
- c) $P(3, 1), \vec{p} = (1, -2), Q(2, 3), \vec{q} = (-2, 4)$.

4.10 Odrediti centar i poluprečnik kruga $k : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

4.11 Odrediti presek kruga k iz prethodnog zadatka i prave:

- a) $p : \vec{p} = (1, 1), P(2, -2)$
- b) $q : x - y - 4 = 0$.

5 Krive u ravni

5.1 Svesti na kanonski oblik translacijom: a) $x^2 - 3y^2 - 4x - 18y - 23 = 0$ b) $3y^2 + 6y - x - 1 = 0$ c) $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y + 8 = 0$.

5.2 Odrediti Bezierovu krivu čije su kontrolne tačke $P_0(1, 1)$, $P_1(2, 2)$, $P_2(4, -1)$.

5.3 Odrediti Bezierovu krivu čije su kontrolne tačke $P_0(1, -1)$, $P_1(2, 0)$, $P_2(4, -1)$, $P_2(0, 0)$.

6 Prava i ravan u prostoru

6.1 Ravni $x - y + 3z - 2 = 0$ odrediti parametarski jednačinu.

6.2 Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, -1)$ i $C(0, 0, 1)$.

6.3 Odrediti ortonormirani koordinatni sistem (x', y', z') u odnosu na ravan $\alpha : x - y - 2 = 0$ (tj. koordinatni sistem $O'x'y'z'$ u kom ravan α ima jednačinu $z' = 0$) i napisati vezu tih koordinata sa koordinatama (x, y, z) .

6.4 Pravu $p : x = t + 4, y = -2t + 1, z = 3t - 2, t \in \mathbb{R}$ zapisati kao presek dve ravni.

6.5 Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ i koja je normalna na ravan $\beta : y = 0$.

6.6 Pravu $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$ zapisati parametarski.

6.7 Odrediti rastojanje tačke $M(1, 0, 12)$ od prave $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

6.8 Odrediti rastojanje tačke $M(1, 0, 12)$ od ravni $\alpha : x - y - 4z = 0$.

6.9 Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ i čije je rastojanje od tačke $M(1, 1, 1)$ jednako $\frac{5}{\sqrt{14}}$. (Jedno rešenje: $3x - y + 2z + 1 = 0$)

6.10 Odrediti međusobni položaj pravih (i presečnu tačku ako postoji) pravih:

$$a) \quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \quad q : 2x = y, 3x = z$$

$$b) \quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \quad q : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$

$$b) \quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \quad q : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$$

6.11 Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ i $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

6.12 Odrediti rastojanje između mimoilaznih pravih

$$p: \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0} \quad q: \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5}.$$

6.13 Izračunati (koristeći digitron za arccos) ugao ravni $\alpha: x+2y-3z-1=0$ i $\beta: 2x-3y+4z+2=0$.

6.14 Izračunati (koristeći digitron za arccos) ugao između prave $p: x+2y-3z-1=0$, $x-z+2=0$ i ravni $\alpha: x-4y+2z+2=0$.

6.15 Odrediti jednačinu normale iz tačke $A(2, 3, -1)$ na ravan $\alpha: 2x+y-4z+5=0$.

6.16 Odrediti tačku Q koja je simetrična tački $P(3, -2, -4)$ u odnosu na ravan $\alpha: 6x+2y-3z-75=0$ kao i projekciju P' tačke P na ravan α .

6.17 Odrediti λ tako da se prave $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ i $q: \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ seku. Koje su koordinate presečne tačke?

6.18 Ispitati da li prava $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-4}$ seče trougao ABC , ako je $A(2, 4, 6)$, $B(-4, 2, 0)$, $C(6, 4, -2)$. U slučaju da seče odrediti koordinate presečne tačke.

7 Poliedarske površi

7.1 a) Iz tabele povezanosti odrediti skup ivica. b) Nacrtati sliku. c) Proveriti da li ta tabela povezanosti zadaje apstraktnu poliedarsku površ. d) U slučaju potvrdnog odgovora pod c) proveriti da li je ta poliedarska površ povezana. e) Odrediti rub te površi i broj komponenta ruba.

za sledeće tabele povezanosti: i) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, $p_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $p_1 = \langle 0, 2, 4, 5 \rangle$, $p_2 = \langle 3, 2, 0 \rangle$, $p_3 = \langle 1, 0, 3 \rangle$.

ii) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $p_0 = \langle 0, 1, 7, 4 \rangle$, $p_1 = \langle 1, 2, 6, 7 \rangle$, $p_2 = \langle 2, 3, 5, 6 \rangle$, $p_3 = \langle 3, 0, 4, 5 \rangle$, $p_4 = \langle 8, 9, 10 \rangle$.

7.2 a) Nacrtati poliedarski model Mebijusove trake i napisati mu tabelu povezanosti. b) Dokazati da je Mebijusova traka neorjentabilna.

7.3 Izvršiti uskladjivanje orijentacija pljosni kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ako je izabrana orijentacija pljosni $p_0 = \langle A, B, C, D \rangle$.

7.4 Data je poliedarska površ $p_0 = \langle \rangle$, $p_0 = \langle 0, 1, 4, 3 \rangle$, $p_1 = \langle 1, 2, 5, 4 \rangle$, $p_2 = \langle 2, 0, 3, 5 \rangle$, $p_3 = \langle 6, 8, 5, 3 \rangle$, $p_4 = \langle 6, 3, 4, 7 \rangle$, $p_5 = \langle 4, 5, 8, 7 \rangle$, $p_6 = \langle 8, 7, 1, 2 \rangle$, $p_7 = \langle 0, 1, 7, 6 \rangle$, $p_8 = \langle 0, 6, 8, 2 \rangle$.

a) Dokazati da je ona poliedar, tj. da nema rub.

b) Izračunati njenu Ojlerovu karakteristiku i broj rupa.

7.5 Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake.

8 Zadaci za vežbu

8.1 *Dat je kvadrat $ABCD$, čije je središte S . Ako je data baza $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{e}_1 = \vec{AS}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$, odrediti koordinate tačaka A, B, C, D, S u reperu Ae .*

8.2 *Odrediti zapreminu tetraedra čija su temena $A(1, 0, 0)$, $B(3, 4, 6)$, $C(0, 1, 0)$, $D(1, 1, 3)$. (Rešenje: $V = \frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 2$.)*

8.3 *Odrediti bar tri tačke koje pripadaju unutrašnjosti trougla sa temenima $A(1, 4)$, $B(6, 5)$, $C(4, 6)$.*

8.4 *Odrediti formule homotetije sa centrom $C(3, -2)$ i koeficijentom -5 . U koju tačku se preslikava tačka $X(3, -2)$ pri ovoj homotetiji. (Rešenje: Pošto je $X = C$, tačka X se slika u sebe, tj. $X'(3, -2)$. Proveriti.)*

8.5 *Odrediti podnožje normale iz tačke $A(1, 3)$ na pravoj $p : 2x - 2y - 4 = 0$. (Rešenje: tačka $(3, 1)$.)*

8.6 *Odrediti presek pravih AB i CD , gde je $A(12, 3)$, $B(12, 5)$, $C(5, 7)$, $D(-2, 1)$. (Rešenje: tačka $(12, 13)$.)*

8.7 *Dat je trougao ABC , $A(3, 5)$, $B(5, 3)$, $C(9, 3)$. Odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla, kao i jednačinu opisanog kruga. (Rešenje: $r = 4$, $C(7, 7)$.)*

8.8 *Odrediti presek prave $p : x + y - 8 = 0$ i kruga $k : x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$. (Rešenje: tačke $(3, 5)$ i $(5, 3)$.)*

8.9 *Date su tačke $A_1(1, 7)$, $A_2(-3, 3)$, $A_3(3, -3)$. a) Odrediti Bezijerovu krivu stepena 2 čije su to kontrolne tačke. b) Odrediti tačku M koja se dobija za $t = \frac{1}{2}$.*

8.10 *Svesti krive na kanonski oblik izometrijskom transformacijom i odrediti o kojoj se krivoj radi: a) $y^2 - 6y - 6x - 3 = 0$, b) $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$. (Rešenje: parabola, tačka)*

8.11 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ i normalna je na ravan $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.*

8.12 *Data je poliedarska površ $p_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $p_1 = \langle 5, 0, 2 \rangle$, $p_2 = \langle 0, 3, 4 \rangle$, $p_3 = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $p_4 = \langle 1, 3, 4 \rangle$, $p_5 = \langle 0, 4, 5 \rangle$.*

a) *Odrediti rub te poliedarske površi. Koliko on ima komponentata?*

b) *Uraditi uskladjivanje orijentacija pljosni. Da li je površ orijentabilna?*