Refleksija $\mathcal{S}_\phi$ u odnosu na pravu kroz koordinatni početak

Ako prava q prolazi kroz koordinatni početak i gradi ugao $\phi \in [0, \pi)$ sa $x-$osom tada je refleksija $\mathcal{S}_\phi$ u odnosu na tu pravu:

$$\mathcal{S}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Refleksija $\mathcal{S}_{Q,\phi}$ u odnosu na proizvoljnu pravu

Ako prava q sadrži tačku $Q(q_1, q_2)$ možemo primeniti sličan trik kao kod rotacije pa je:

$$\mathcal{S}_{Q,\phi} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi & 0 \\ -\sin 2\phi & -\cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Istezanje $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ sa centrom u tački Q

Ako je tačka Q koordinatni početak tada je istezanje dato sa

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ako Q nije koordinatni početak primenjuje se sličan trik kao kod rotacije.

Primetimo da je **homotetija** specijalan slučaj ovog preslikavanja za $\lambda_1 = \lambda_2$.

Takodje, ako je $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ radi se o **refleksiji u odnosu na** $x-$**osu**. Slično se postiže refleksija u odnosu na $y-$osu.

Smicanje

Preslikavanje dato formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

naziva se **smicanje** sa koeficientom λ u pravcu x ose.

Smicanje preslikava kvadrat u paralelogram iste visine i osnovice, pa dakle i iste površine ($\det A = 1$).

Zadatak 1 *Odrediti formule homotetije sa centrom u tački* $C(1,2)$ *i koeficientom 3. U koju tačku se preslikava koordinatni početak pri ovoj homotetiji?*

Zadatak 2 *Odrediti formule rotacije za ugao* $\phi = \frac{7\pi}{6}$ *oko tačke* $A(-2,3)$. *U koju tačku se preslikava tačka* $M(1,3)$ *pri ovoj rotaciji?*

U narednim zadacima smatramo da su na ekranu računara uvedene celobrojne (x, y) koordinate, $x \in [0, 1023], y \in [0, 767]$, pri čemu donji levi piksel ima koordinate $(0, 0)$, a x osa je horizontalna. Pretpostavljamo da su to i koordinate prozora u kome radimo. Koristiti matrični zapis afinih preslikavanja.

Zadatak 3 *"Zoom" alatka je realizovana na sledeći način: kada kliknemo mišem na poziciju $C(x_0, y_0)$ slika se uveća za 40 posto, ali tako da se tačka C ne pomera.*

Ako je korisnik programa kliknuo mišem na pozicije $C_1(200, 12)$, $C_2(466, 67)$, $C_3(80, 222)$, redom, napisati matricu transformacije tačaka ekrana.

Zadatak 4 *Isto kao prethodni zadatak, samo što nakon klika na tačku C, tačka C postaje središte ekrana.*

Zadatak 5 *"Zoom to window" alatka je realizovana na sledeći način: kada kliknemo mišem na poziciju* $A(x_0, y_0)$*, držimo pritisnutog miša, a zatim ga pustimo na poziciji* $B(x_1, y_1)$ *zumira se (i centrira na ekranu) pravougaonik čija su* A *i* B *dijagonalna temena. Napisati afinu transformaciju koja odgovara ovoj komandi. Kako izgledaju njene formule ako je* $A(750, 620)$*,* $B(960, 100)$*?*

Zadatak 6 *"Drag" alatka je realizovana na sledeći način: kada kliknemo mišem na poziciju* $A(x_0, y_0)$*, držimo pritisnutog miša, a zatim ga pustimo na poziciji* $B(x_1, y_1)$ *vrši se translacija ekrana za vektor* AB*. Napisati afinu transformaciju koja odgovara ovoj komandi.*

Zadatak 7 *"Rotate" alatka predstavlja rotaciju oko prethodno definisane tačke O za neki ugao koji se odredjuje misem na sledeći način. Kada kliknemo mišem na poziciju $A(x_0, y_0)$, držimo pritisnutog miša, a zatim ga pustimo na poziciji $B(x_1, y_1)$ vrši se rotacija za ugao $\angle AOB$, od tačke A ka tački B (kraćim putem). Napisati afinu transformaciju koja odgovara ovoj komandi. Kako izgleda matrica ove transformacije ako je $O(740, 150)$, $A(740, 250)$, $B(800, 150)$?*

Prava u ravni

Prava p je zadata tačkom $P(x_0, y_0) \in p$ i normalnim vektorom $\overrightarrow{n}_p = (a, b)$.

Odatle se izvodi **implicitna jednačina prave**:

$$ax + by + c = 0. \tag{2}$$

Primer 1 *Odrediti implicitnu jednačinu prave koja sadrži tačku* $M(1, -2)$ *i čiji je normalni vektor* $\overrightarrow{n}_p\,(3, 4)$*.*

Drugi način da opišemo pravu jeste da joj zadamo jednu tačku $P(x_0, y_0)$ i nenula vektor pravca $\overrightarrow{p}\ (p_x, p_y)$. Tada se svaka tačka M prave p može zapisati u obliku

$$M(t) = M = P + t\,\overrightarrow{p}, \tag{3}$$

za neko $t \in \mathbb{R}$. Ova jednačina se naziva **parametarska jednačina prave**. Ona se u koordinatama zapisuje kao u koordinatama zapisuje kao

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

Prelazak iz jednog oblika prave u drugi.

Duž AB je parametarski predstavljena sa

$$M(t) = A + t\,\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1]. \tag{5}$$

Poluprava $[AB)$ sa temenom A koja sadrži tačku B je data sa

$$M(t) = A + t\,\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, \infty). \tag{6}$$

Tačke C i D pripadaju istoj **poluravni** odredjenoj sa ravni pravom $AB : f(x, y) = ax + by + c = 0$ ako

$$\text{znak}(f(C)) = \text{znak}(f(D)) \quad \text{ili}$$

$$\text{znak}(D_{ABC}) = \text{znak}(D_{ABD}).$$

Parametrizacija trougla

Tri nekolinearne tačke A, B i C odredjuju trougao ABC. Neka je $\overrightarrow{f_1}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{f_2}=\overrightarrow{AC}$. Tada se svaka tačka trougla može zapisati u obliku

$$X(t_1, t_2) = A + t_1 \overrightarrow{f_1} + t_2 \overrightarrow{f_2}, \quad 0 \leq t_0, t_1 \leq 1, t_0 + t_1 \leq 1.$$

Prethodna jednačina se naziva **parametarska jednačina trougla**.

Primer

Zadatak 8 *Data je prava* $p : 3x - 2y + 7 = 0$. *a) Odrediti normalizovani oblik te jednačine. b) Odrediti parametarski oblik prave* p *c) Koji ugao prava* p *gradi sa* x *osom?*

Zadatak 9 *Data je prava* $q : x = -t + 4, y = 2t - 7, t \in \mathbb{R}$. *a) Odrediti implicitni oblik prave* q. *b) Odrediti implicitni oblik prave* r *koja sadrži tačku* $R(3, 7)$ *i paralelna je* q.

Zadatak 10 *Odrediti jednačinu normale* n *iz tačke* $A(1, 7)$ *na pravu* p *ako je a)* $p : x = 2t + 4, y = 3t - 5, t \in \mathbb{R}$ *b)* $p : 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0$.

Zadatak 11 *Neka je* $A(2,3), B(-1,4)$. *a) Odrediti parametarsku jednačinu prave* AB. *b) Ispitati da li tačka* $C(14,-1)$ *polupravoj* $[AB)$. *c) Ispitati da li tačka* $D(1,\frac{10}{3})$ *i u kom odnosu ona deli duž* AB. *d) Podeliti duž* AB *na* 6 *jednakih delova tačkama* $P_1,\ldots,P_5$.

Zadatak 12 *Ispitati da li tačke* $C(1,1)$ *i* $D(-7,11)$ *pripadaju istoj poluravni odredjenoj pravom* AB, $A(2,-2), B(1,3)$.

Presek pravih datih parametarski

Pretpostavimo da su **date dve prave: prava p tačkom P i vektorom $\overrightarrow{p}$ i prava q tačkom Q i vektorom $\overrightarrow{q}$.** Cilj nam je da odredimo presek tih dveju pravih, ako postoji. Tačke $M = P + t\overrightarrow{p}$ i $N = Q + s\overrightarrow{q}$ za $t, s \in \mathbb{R}$. Iz uslova da se prave seku, tj. $M = N$, dobijamo sledeće.

- $D(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) \neq 0$ **Postoji presek** dat sa $s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{p})}{D(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})}$ ili $t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{q})}{D(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})}$
- $D(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = 0$ i $D(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{p}) = 0$ **Prave se poklapaju**
- $D(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = 0$ i $D(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{p}) \neq 0$, **Prave su paralelne.**

Presek duži, polupravih i pravih

Ako su date duži

$$AB : M = A + t\,\overrightarrow{AB}, \;\; t \in [0,1]$$

$$CD : N = C + s\,\overrightarrow{CD}, \;\; s \in [0,1],$$

presek se odredjuje slično kao i presek pravih.

Ako se desi prvi slučaj potrebno je još proveriti da li $t, s \in [0,1]$.

Ako se desi drugi slučaj potrebno je proveriti da li se duži poklapaju i "koliko".

U trećem slučaju duži se definitivno ne seku jer pripadaju različitim pravama.