Ravan u prostoru

Ravan α je odredjena normalnim vektorom $\overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$ i tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Jednačina te ravni je:

$$\begin{aligned} 0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = \\ &= ax + by + cy + d \end{aligned}$$

Poluravan je odredjena nejednačinom $ax + by + cy + d > 0$, odnosno $ax + by + cy + d < 0$.

Zadatak 1 *a) Odrediti ravan β koja sadrži tačku $B(1, 3, -2)$ i paralelna ravni $\alpha : x - 3y + 4z - 6 = 0$.*
b) Da li se $A(1, 1, 1)$ i $C(-1, -1, 3)$ nalaze sa iste strane ravni β.

Zadatak 2 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, -1)$ i $C(0, 0, 1)$.*

Parametarska jednačina ravni

Drugi način da opišemo ravan α jeste da joj zadamo jednu tačku $A(x_0, y_0, z_0)$ i dva vektora $\overrightarrow{u}\ (u_x, u_y, u_z)$ i $\overrightarrow{v}\ (v_x, v_y, v_z)$ paralelna ravni α. Tada se svaka tačka M ravni α može zapisati u obliku

$$M(t, s) = M = A + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}, \tag{1}$$

za neke brojeve $t, s \in \mathbb{R}$. Vektorska jednačina (1) se u koordinatama zapisuje kao

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tu_x + sv_x, \\ y &= y_0 + tu_y + sv_y, \\ z &= z_0 + tu_z + sv_z, \end{aligned} \tag{2}$$

za $t, s \in \mathbb{R}$ što obično zovemo **parametarska jednačina ravni**.

Zadatak 3 *Data je ravan* α *parametarski:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 3 & + & 2t & + & s, \\ y & = & -7 & - & t, & & \\ z & = & & & t & - & 6s, \end{array}$$

$t, s \in \mathbb{R}$. *Odrediti implicitni oblik te ravni.*

Zadatak 4 *Odrediti parametarski oblik ravni* $\alpha : x - y + 6z - 1 = 0$.

Zadatak 5 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke* $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, -1)$ *i* $C(0, 0, 1)$.

Koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni

Za rešavanje mnogih problema korisno je preći na novi ortonormirani koordinatni sistem $Ax'y'z'$ u kom data ravan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ ima jednačinu $z' = 0$.

Takav sistem se odredjuje tako sto se za koordinatni početak uzme neka tačka A ravni α, za vektor z'-ose se uzme jedinični vektor $\overrightarrow{n_\alpha}$, a vektori y' i x'-osa su bilo koji jedinični, medjusobno ortogonalni vektori, normalni na $\overrightarrow{n_\alpha}$.

Koristeći koordinatni sistem prilagodjen ravni α rešiti sledeći zadatak.

Zadatak 6 *Data je ravan $\alpha : x + 2y + 2z - 1 = 0$ i u njoj tačka $C(3, 1, -2)$. Odrediti parametrizaciju kruga k poluprečnika $r = 2$ sa centrom C koji pripada ravni α.*

Jednačina prave u prostoru

Prava u prostoru je zadata tačkom $P(x_0, y_0, z_0)$ i nenula vektor pravca $\overrightarrow{p}\ (p_x, p_y, p_z)$. Tada je svaka tačka M prave p oblika

$$M(t) = M = P + t\,\overrightarrow{p}, \tag{3}$$

za neko $t \in \mathbb{R}$. U koordinatama imamo

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \\ z &= z_0 + tp_z, \end{aligned} \tag{4}$$

$t \in \mathbb{R}$ što obično zovemo **parametarska jednačina prave**. Kada jednačine prave (4) rešimo po parametru t dobijamo

$$\frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y} = \frac{z - z_0}{p_z} = t, \tag{5}$$

što se često zove **kanonski oblik jednačine prave.**

Prava kao presek dve ravni

Posmatrajmo sistem dve linearne jednačine

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad ax + by + cz + d = 0, \\ \beta: &\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

koje predstavljaju ravni α i β. Ako su vektori $\overrightarrow{n_\alpha}$ i $\overrightarrow{n_\beta}$ kolinearni, tj. $|\overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta}| = 0$, prave su paralelne ili se poklapaju. U suprotnom, ako su vektori $\overrightarrow{n_\alpha}$ i $\overrightarrow{n_\beta}$ nezavisni one se seku po jedinstvenoj pravoj $p = \alpha \cap \beta$.

Zadatak 7 *Pravu p koja je presek ravni $\alpha : 3x - y + 2z + 1 = 0$ i $\beta : x - z = 0$ predstaviti u kanonskom obliku.*

Zadatak 8 *Pravu $p : x = t + 4, y = -2t + 1, z = 3t - 2, t \in \mathbb{R}$ zapisati kao presek dve ravni.*

Teorema *rastojanje tačke* M *od prave* p*, odredjene tačkom* $P \in p$ *i vektorom pravca* $\overrightarrow{p}$*, je dato formulom*

$$d = \frac{|\ \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}\ |}{|\ \overrightarrow{p}\ |}.$$

Teorema *Rastojanje tačke* $M(x_0, y_0, z_0)$ *od ravni* $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ *dato je formulom*

$$d(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Zadatak 9 *Odrediti rastojanje tačke* $M(1, 0, 12)$ *od prave* $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

Zadatak 10 *Odrediti rastojanje tačke* $M(1, 0, 12)$ *od ravni* $\alpha : x - y - 4z = 0$.

Teorema (Pramen ravni) *Skup svih ravni koje sadrže pravu p koja je data jednačinom (6), osim ravni β je dat jednačinom*

$$\gamma_\lambda : ax + by + cz + d + \lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0,$$

za $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zadatak 11 *Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : x = 4t-2, y = t+2, z = -2t-2$, i čije je rastojanje od tačke $M(3,2,1)$ jednako $\sqrt{14}$.*

Zadatak 12 *Odrediti jedančinu ravni koja sadrži pravu $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ i normalna je na ravan $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.*

Zadatak 13 *Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $L(2,-1,7)$ i seče prave $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ i $q : \frac{x-7}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.*