Geometrija (I smer)
deo 5: Dodatne teme

Srdjan Vukmirović

Matematički fakultet, Beograd

12. decembar 2012.

Poliedarske površi

Prosta poliedarska površ $\mathcal{M}$ je objekat prostora $\mathbb{R}^3$ koji se sastoji od konačno mnogo pljosni koje su konveksni poligoni i važi

Poliedarske površi

Prosta poliedarska površ $\mathcal{M}$ je objekat prostora $\mathbb{R}^3$ koji se sastoji od konačno mnogo pljosni koje su konveksni poligoni i važi

1) svaka ivica je pripada bar jednoj pljosni(ivica ruba), a najviše dvema pljosnima (unutrašnja ivica);

Poliedarske površi

Prosta poliedarska površ $\mathcal{M}$ je objekat prostora $\mathbb{R}^3$ koji se sastoji od konačno mnogo pljosni koje su konveksni poligoni i važi

1) svaka ivica je pripada bar jednoj pljosni(ivica ruba), a najviše dvema pljosnima (unutrašnja ivica);
2) presek dve pljosni može biti samo ivica (to znači da površ nema samopreseka, tj. prosta je).

Poliedarske površi

Prosta poliedarska površ $\mathcal{M}$ je objekat prostora $\mathbb{R}^3$ koji se sastoji od konačno mnogo pljosni koje su konveksni poligoni i važi

1) svaka ivica je pripada bar jednoj pljosni(ivica ruba), a najviše dvema pljosnima (unutrašnja ivica);
2) presek dve pljosni može biti samo ivica (to znači da površ nema samopreseka, tj. prosta je).

Temena i ivice tih pljosni zovemo temenima i ivicam poliedarske površi $\mathcal{M}$. Skup temena označavamo $\mathcal{T}$, ivica $\mathcal{I}$, a pljosni $\mathcal{P}$.

Poliedarske površi

Prosta poliedarska površ $\mathcal{M}$ je objekat prostora $\mathbb{R}^3$ koji se sastoji od konačno mnogo pljosni koje su konveksni poligoni i važi

1) svaka ivica je pripada bar jednoj pljosni(ivica ruba), a najviše dvema pljosnima (unutrašnja ivica);
2) presek dve pljosni može biti samo ivica (to znači da površ nema samopreseka, tj. prosta je).

Temena i ivice tih pljosni zovemo temenima i ivicam poliedarske površi $\mathcal{M}$. Skup temena označavamo $\mathcal{T}$, ivica $\mathcal{I}$, a pljosni $\mathcal{P}$. Unija svih ivica ko je pripadaju samo jednoj pljosni (tj. svih rubnih ivica) naziva se **rub poliedarske površi**.

Poliedarske površi

Prosta poliedarska površ $\mathcal{M}$ je objekat prostora $\mathbb{R}^3$ koji se sastoji od konačno mnogo pljosni koje su konveksni poligoni i važi

1) svaka ivica je pripada bar jednoj pljosni(ivica ruba), a najviše dvema pljosnima (unutrašnja ivica);
2) presek dve pljosni može biti samo ivica (to znači da površ nema samopreseka, tj. prosta je).

Temena i ivice tih pljosni zovemo temenima i ivicam poliedarske površi $\mathcal{M}$. Skup temena označavamo $\mathcal{T}$, ivica $\mathcal{I}$, a pljosni $\mathcal{P}$.
Unija svih ivica ko je pripadaju samo jednoj pljosni (tj. svih rubnih ivica) naziva se **rub poliedarske površi**.
Poliedarsku površ bez ruba zvaćemo **poliedrom**.

Poliedarske površi

Prosta poliedarska površ $\mathcal{M}$ je objekat prostora $\mathbb{R}^3$ koji se sastoji od konačno mnogo pljosni koje su konveksni poligoni i važi

1) svaka ivica je pripada bar jednoj pljosni(ivica ruba), a najviše dvema pljosnima (unutrašnja ivica);
2) presek dve pljosni može biti samo ivica (to znači da površ nema samopreseka, tj. prosta je).

Temena i ivice tih pljosni zovemo temenima i ivicam poliedarske površi $\mathcal{M}$. Skup temena označavamo $\mathcal{T}$, ivica $\mathcal{I}$, a pljosni $\mathcal{P}$.
Unija svih ivica ko je pripadaju samo jednoj pljosni (tj. svih rubnih ivica) naziva se **rub poliedarske površi**.
Poliedarsku površ bez ruba zvaćemo **poliedrom**.
Pljosni koje imaju zajedničku ivicu nazivamo **susednim.**

Poliedarske površi

Prosta poliedarska površ $\mathcal{M}$ je objekat prostora $\mathbb{R}^3$ koji se sastoji od konačno mnogo pljosni koje su konveksni poligoni i važi

1) svaka ivica je pripada bar jednoj pljosni(ivica ruba), a najviše dvema pljosnima (unutrašnja ivica);
2) presek dve pljosni može biti samo ivica (to znači da površ nema samopreseka, tj. prosta je).

Temena i ivice tih pljosni zovemo temenima i ivicam poliedarske površi $\mathcal{M}$. Skup temena označavamo $\mathcal{T}$, ivica $\mathcal{I}$, a pljosni $\mathcal{P}$. Unija svih ivica ko je pripadaju samo jednoj pljosni (tj. svih rubnih ivica) naziva se **rub poliedarske površi**.
Poliedarsku površ bez ruba zvaćemo **poliedrom**.
Pljosni koje imaju zajedničku ivicu nazivamo **susednim.**
Poliedarska površ je **povezana** ako je svake dve njene pljosni moguće povezati nizom susednih pljosni.

Tabela povezanosti

Tabela povezanosti

Polidearska površ se zadaje **tabelom povezanosti** i koordinatama temena.

Tabela povezanosti

Polidearska površ se zadaje **tabelom povezanosti** i koordinatama temena.

Ako zadamo samo tabelu povezanosti tada se radi o **apstraktnom poliedru**. Za njega ne znamo kako je smešten u prostoru i ne možemo ispitati uslov 2) iz definicije poliedarske površi. U nastavku radimo samo sa apstraktim poliedrima.

Tabela povezanosti

Polidearska površ se zadaje **tabelom povezanosti** i koordinatama temena.

Ako zadamo samo tabelu povezanosti tada se radi o **apstraktnom poliedru**. Za njega ne znamo kako je smešten u prostoru i ne možemo ispitati uslov 2) iz definicije poliedarske površi. U nastavku radimo samo sa apstraktim poliedrima.

Primer

$$P_0 = \langle 1, 2, 3 \rangle, \quad P_1 = \langle 0, 2, 3 \rangle, \quad P_2 = \langle 0, 1, 3 \rangle, \quad P_3 = \langle 0, 1, 2 \rangle.$$

Brojevi $0, 1, 2, 3$ *predstavljaju temena* T_0, T_1, T_2, T_3 *tetraedra.*

Primer

Data je tabela povezanosti $p_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $p_1 = \langle 2, 1, 6, 5 \rangle$,
$p_2 = \langle 2, 5, 4, 3 \rangle$, $p_3 = \langle 3, 1, 6, 4 \rangle$.
a) Odrediti skup ivica i temena.
b) Da li tabela povezanosti predstavlja poliedarsku površ?
c) Ako predstavlja, odrediti joj rub i broj komponenata ruba.
d) skicirati polidearsku površ.

Primer

Data je tabela povezanosti $p_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $p_1 = \langle 2, 1, 6, 5 \rangle$, $p_2 = \langle 2, 5, 4, 3 \rangle$, $p_3 = \langle 3, 1, 6, 4 \rangle$.
a) Odrediti skup ivica i temena.
b) Da li tabela povezanosti predstavlja poliedarsku površ?
c) Ako predstavlja, odrediti joj rub i broj komponenata ruba.
d) skicirati polidearsku površ.

Primer

Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 5, 6, 7 \rangle$, $p_1 = \langle 1, 3, 0 \rangle$, $p_2 = \langle 4, 0, 1, 5 \rangle$, $p_3 = \langle 6, 2, 1, 5 \rangle$, $p_4 = \langle 7, 6, 2, 3 \rangle$, $p_5 = \langle 3, 0, 4, 7 \rangle$.
a) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.
b) Skicirati površ (Rešenje: Kocka, sa čijih su suprotnih strana isečena dva trougla).

Orjentabilnost poliedarske površi

Orjentabilnost poliedarske površi

Neka je $\mathcal{M}$ povezana poliedarska površ. Kažemo da su dve susedne pljosni **iste orjentacije**, ako različito orjentišu zajedničku ivicu.

Orjentabilnost poliedarske površi

Neka je $\mathcal{M}$ povezana poliedarska površ. Kažemo da su dve susedne pljosni **iste orjentacije**, ako različito orjentišu zajedničku ivicu.

Definicija

Poliedarska površ $\mathcal{M}$ je **orjentabilna** *ako njene pljosni možemo orjentisati tako da su svake dve susedne pljosni iste orjentacije.*

Orjentabilnost poliedarske površi

Neka je $\mathcal{M}$ povezana poliedarska površ. Kažemo da su dve susedne pljosni **iste orjentacije**, ako različito orjentišu zajedničku ivicu.

Definicija

Poliedarska površ $\mathcal{M}$ je **orjentabilna** *ako njene pljosni možemo orjentisati tako da su svake dve susedne pljosni iste orjentacije.*

Orjentaciju pljosni iz prethodne definicije zovemo **orjentacija poliedarske površi $\mathcal{M}$.** Ako je poliedarska površ orjentabilna ona ima tačno dve orjentacije.

Orjentabilnost poliedarske površi

Neka je $\mathcal{M}$ povezana poliedarska površ. Kažemo da su dve susedne pljosni **iste orjentacije**, ako različito orjentišu zajedničku ivicu.

Definicija

Poliedarska površ $\mathcal{M}$ je **orjentabilna** *ako njene pljosni možemo orjentisati tako da su svake dve susedne pljosni iste orjentacije.*

Orjentaciju pljosni iz prethodne definicije zovemo **orjentacija poliedarske površi $\mathcal{M}$.** Ako je poliedarska površ orjentabilna ona ima tačno dve orjentacije.

Primer

Kocka je orjentabilna poliedarska površ.

Primer

Mebijusova traka je neorjentabilna površ.

Primer

Mebijusova traka je neorjentabilna površ.

Primetimo da je rub Mebijusove trake krug, tj. sastoji se samo iz jedne komponente.

Primer

Mebijusova traka je neorjentabilna površ.

Primetimo da je rub Mebijusove trake krug, tj. sastoji se samo iz jedne komponente.

Teorema

Svi poliedarski modeli neke glatke površi su ili svi orjentabilni, ili svi neorjentabilni.

Primer

Mebijusova traka je neorjentabilna površ.

Primetimo da je rub Mebijusove trake krug, tj. sastoji se samo iz jedne komponente.

Teorema

Svi poliedarski modeli neke glatke površi su ili svi orjentabilni, ili svi neorjentabilni.

Teorema

Svaki prost poliedar (bez samopreseka - uslov 2)) je orjentabilna površ.

Ojlerova karakteristika i rod poliedarske površi

Ojlerova karakteristika i rod poliedarske površi

Ojlerova karakteristika poliedarske površi $\mathcal{M}$ je broj

$$\xi(\mathcal{M}) = T - I + P,$$

gde su T, I i P redom brojevi temena, ivica i pljosni te poliedarske površi.

Ojlerova karakteristika poliedarske površi $\mathcal{M}$ je broj

$$\xi(\mathcal{M}) = T - I + P,$$

gde su T, I i P redom brojevi temena, ivica i pljosni te poliedarske površi.

Teorema

Svi poliedarski modeli iste glatke površi imaju istu Ojlerovu karakteristiku.

Ojlerova karakteristika i rod poliedarske površi

Ojlerova karakteristika poliedarske površi $\mathcal{M}$ je broj

$$\xi(\mathcal{M}) = T - I + P,$$

gde su T, I i P redom brojevi temena, ivica i pljosni te poliedarske površi.

Teorema

Svi poliedarski modeli iste glatke površi imaju istu Ojlerovu karakteristiku.

Ako je $\mathcal{M}$ poliedar i $r(\mathcal{M})$ rod poliedra (on se intuitivno definiše kao "broj rupa") tada važi:

$$\xi(\mathcal{M}) = 2 - 2r(\mathcal{M}).$$

Ojlerova karakteristika i rod poliedarske površi

Ojlerova karakteristika poliedarske površi $\mathcal{M}$ je broj

$$\xi(\mathcal{M}) = T - I + P,$$

gde su T, I i P redom brojevi temena, ivica i pljosni te poliedarske površi.

Teorema

Svi poliedarski modeli iste glatke površi imaju istu Ojlerovu karakteristiku.

Ako je $\mathcal{M}$ poliedar i $r(\mathcal{M})$ rod poliedra (on se intuitivno definiše kao "broj rupa") tada važi:

$$\xi(\mathcal{M}) = 2 - 2r(\mathcal{M}).$$

Rod bilo kog modela sfere je 0, pa je Ojlerova karakteristika jednaka 2.

Ojlerova karakteristika i rod poliedarske površi

Ojlerova karakteristika poliedarske površi $\mathcal{M}$ je broj

$$\xi(\mathcal{M}) = T - I + P,$$

gde su T, I i P redom brojevi temena, ivica i pljosni te poliedarske površi.

Teorema

Svi poliedarski modeli iste glatke površi imaju istu Ojlerovu karakteristiku.

Ako je $\mathcal{M}$ poliedar i $r(\mathcal{M})$ rod poliedra (on se intuitivno definiše kao "broj rupa") tada važi:

$$\xi(\mathcal{M}) = 2 - 2r(\mathcal{M}).$$

Rod bilo kog modela sfere je 0, pa je Ojlerova karakteristika jednaka 2.
Ako je $\mathcal{M}$ model torusa tada je $\xi(\mathcal{M}) = 0$, jer torus ima jednu rupu, tj. $r(\mathcal{M}) = 1$.

Platonova tela

Platonova tela

Pravilan poliedar (ili Platonovo telo) je poliedar roda nula čije su sve pljosni podudarni, pravilni poligoni sa q ivica, a u svakom temenu se sreće p ivica.

Platonova tela

Pravilan poliedar (ili Platonovo telo) je poliedar roda nula čije su sve pljosni podudarni, pravilni poligoni sa q ivica, a u svakom temenu se sreće p ivica.

Teorema

Postoji tačno pet topološki pravilnih poliedara: tetaedar, kocka (heksaedar), oktaedar, dodekaedar i ikosaedar.

poliedar	p	q	T	I	P
tetraedar	3	3	4	6	4
kocka	3	4	8	12	6
oktaedar	4	3	6	12	8
dodekaedar	3	5	20	30	12
ikosaedar	5	3	12	30	20

Unutrašnjost i spoljašnjost poligona

Unutrašnjost i spoljašnjost poligona

Neka je dat poligon $p = A_0A_1 \dots A_{n-1}, (A_n = A_0)$ i tačka M koja mu ne pripada (tj. ne pripada nijednoj ivici). Ako je a poluprava sa temenom M koja ne sadrži ni jedno teme poligona, označimo sa $k(a)$ broj presečnih tačaka poligona i poluprave a.

Unutrašnjost i spoljašnjost poligona

Neka je dat poligon $p = A_0A_1 \ldots A_{n-1}, (A_n = A_0)$ i tačka M koja mu ne pripada (tj. ne pripada nijednoj ivici). Ako je a poluprava sa temenom M koja ne sadrži ni jedno teme poligona, označimo sa $k(a)$ broj presečnih tačaka poligona i poluprave a.

Lema

Parnost broja $k(a)$ ne zavisi od izbora poluprave a.

Unutrašnjost i spoljašnjost poligona

Neka je dat poligon $p = A_0A_1 \dots A_{n-1}, (A_n = A_0)$ i tačka M koja mu ne pripada (tj. ne pripada nijednoj ivici). Ako je a poluprava sa temenom M koja ne sadrži ni jedno teme poligona, označimo sa $k(a)$ broj presečnih tačaka poligona i poluprave a.

Lema

Parnost broja $k(a)$ ne zavisi od izbora poluprave a.

Definicija

Kažemo da tačka M **pripada unutrašnjosti poligona** *p ako je $k(a)$ neparan, a* **spoljašnosti poligona** *ako je $k(a)$ paran.*

Unutrašnjost i spoljašnjost poligona

Neka je dat poligon $p = A_0A_1 \ldots A_{n-1}, (A_n = A_0)$ i tačka M koja mu ne pripada (tj. ne pripada nijednoj ivici). Ako je a polupravа sa temenom M koja ne sadrži ni jedno teme poligona, označimo sa $k(a)$ broj presečnih tačaka poligona i poluprave a.

Lema

Parnost broja $k(a)$ ne zavisi od izbora poluprave a.

Definicija

Kažemo da tačka M **pripada unutrašnjosti poligona** *p ako je $k(a)$ neparan, a* **spoljašnosti poligona** *ako je $k(a)$ paran.*

Teorema

Unutrašnost i spoljašnjost prostog poligona su povezani likovi (tj. svake dve tačke unutrašnosti možemo povezati poligonskom linijom koja pripada unutrašnjosti).

Triangulacija poligona

Triangulacija poligona

Triangulacija prostog poligona je razbijanje unutrašnjosti poligona na trouglove unutrašnjim dijagonalama koje se ne seku.

Triangulacija poligona

Triangulacija prostog poligona je razbijanje unutrašnjosti poligona na trouglove unutrašnjim dijagonalama koje se ne seku.
Ulaz: lista temena poligona,
Izlaz: lista trouglova koji čine triangulaciju.

Triangulacija poligona

Triangulacija prostog poligona je razbijanje unutrašnjosti poligona na trouglove unutrašnjim dijagonalama koje se ne seku.
Ulaz: lista temena poligona,
Izlaz: lista trouglova koji čine triangulaciju.
Triangulacija **nije jednistvena**.

Triangulacija poligona

Triangulacija prostog poligona je razbijanje unutrašnjosti poligona na trouglove unutrašnjim dijagonalama koje se ne seku.
Ulaz: lista temena poligona,
Izlaz: lista trouglova koji čine triangulaciju.
Triangulacija **nije jednistvena**.

Lema (dokaz je pogodan za direktnu implementaciju)

Svaki prost poligon sa više od tri temena ima unutrašnju dijagonalu.

Triangulacija poligona

Triangulacija prostog poligona je razbijanje unutrašnjosti poligona na trouglove unutrašnjim dijagonalama koje se ne seku.
Ulaz: lista temena poligona,
Izlaz: lista trouglova koji čine triangulaciju.
Triangulacija **nije jednistvena**.

Lema (dokaz je pogodan za direktnu implementaciju)

Svaki prost poligon sa više od tri temena ima unutrašnju dijagonalu.

Teorema

Svaki prost poligon se može triangulisati. Triangulacija poligona sa n temena ima tačno $n-2$ trougla.

Konveksni omotač skupa od n tačaka ravni

Konveksni omotač skupa od n tačaka ravni

Definicija

Za lik $\mathcal{F}$ kažemo da je **konveksan** *ako za svake dve tačke $A, B \in \mathcal{F}$ koje mu pripadaju i cela duž AB pripada liku $\mathcal{F}$.*

Konveksni omotač skupa od n tačaka ravni

Definicija

Za lik $\mathcal{F}$ kažemo da je **konveksan** *ako za svake dve tačke $A, B \in \mathcal{F}$ koje mu pripadaju i cela duž AB pripada liku $\mathcal{F}$.*
Konveksni omotač $\mathcal{CH}(\mathcal{F})$ *nekog lika $\mathcal{F} \subset E^n$ je najmanji konveksan podskup od E^n koji sadrži $\mathcal{F}$.*

Konveksni omotač skupa od n tačaka ravni

Definicija

Za lik $\mathcal{F}$ kažemo da je **konveksan** *ako za svake dve tačke $A, B \in \mathcal{F}$ koje mu pripadaju i cela duž AB pripada liku $\mathcal{F}$.*
Konveksni omotač $\mathcal{CH}(\mathcal{F})$ *nekog lika $\mathcal{F} \subset E^n$ je najmanji konveksan podskup od E^n koji sadrži $\mathcal{F}$.*

Interesuje nas specijalan slučaj kada se lik sastoji od n tačaka ravni: $\mathcal{F} = \{P_1, \dots P_n\}$

Konveksni omotač skupa od n tačaka ravni

Definicija

Za lik $\mathcal{F}$ kažemo da je **konveksan** *ako za svake dve tačke $A, B \in \mathcal{F}$ koje mu pripadaju i cela duž AB pripada liku $\mathcal{F}$.*
Konveksni omotač *$\mathcal{CH}(\mathcal{F})$ nekog lika $\mathcal{F} \subset E^n$ je najmanji konveksan podskup od E^n koji sadrži $\mathcal{F}$.*

Interesuje nas specijalan slučaj kada se lik sastoji od n tačaka ravni: $\mathcal{F} = \{P_1, \ldots P_n\}$
Može se dokazati da je taj konveksni omotač jedinstven i da je to konveksan poligon čija su temena neke od tačaka skupa $\mathcal{F}$.

Konveksni omotač skupa od n tačaka ravni

Definicija

Za lik $\mathcal{F}$ kažemo da je **konveksan** *ako za svake dve tačke $A, B \in \mathcal{F}$ koje mu pripadaju i cela duž AB pripada liku $\mathcal{F}$.*
Konveksni omotač $\mathcal{CH}(\mathcal{F})$ *nekog lika $\mathcal{F} \subset E^n$ je najmanji konveksan podskup od E^n koji sadrži $\mathcal{F}$.*

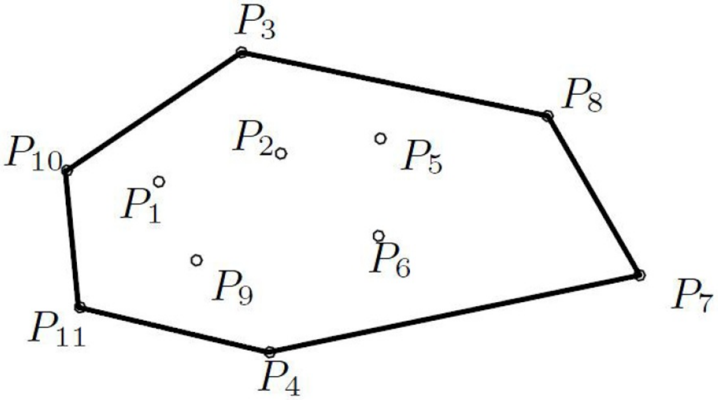
Interesuje nas specijalan slučaj kada se lik sastoji od n tačaka ravni: $\mathcal{F} = \{P_1, \dots P_n\}$
Može se dokazati da je taj konveksni omotač jedinstven i da je to konveksan poligon čija su temena neke od tačaka skupa $\mathcal{F}$.
Ulaz: skup $P[i] = \{P_1, \dots P_n\}$ od n tačaka ravni

Konveksni omotač skupa od n tačaka ravni

Definicija

Za lik $\mathcal{F}$ kažemo da je **konveksan** *ako za svake dve tačke $A, B \in \mathcal{F}$ koje mu pripadaju i cela duž AB pripada liku $\mathcal{F}$.*
Konveksni omotač $\mathcal{CH}(\mathcal{F})$ *nekog lika $\mathcal{F} \subset E^n$ je najmanji konveksan podskup od E^n koji sadrži $\mathcal{F}$.*

Interesuje nas specijalan slučaj kada se lik sastoji od n tačaka ravni: $\mathcal{F} = \{P_1, \ldots P_n\}$
Može se dokazati da je taj konveksni omotač jedinstven i da je to konveksan poligon čija su temena neke od tačaka skupa $\mathcal{F}$.
Ulaz: skup $P[i] = \{P_1, \ldots P_n\}$ od n tačaka ravni
Izlaz: temena $CH[j] = \{P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\}, \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots n\}$ konveksnog omotača, poredjana suprotno od smera kazaljke na satu.


P_3
P_8
P_{10}
P_2
P_5
P_1
P_6
P_9
P_7
P_{11}
P_4

Konveksni omotač - spori algoritam (reda $O(n^3)$)

```
for(i=1, i<n, i++){
      for(j=1, j<= n, j++){
            ivica = TRUE;
            for(k=1, k<= n, k++){
                  if(not(levo(P[i], P[j], P[k]))){
                        ivica = FALSE;
                        break;
                  }
            }
            if(ivica) dodaj(P[i]P[j], CH);
      }
}
preuredi(CH);
```

Napomena: **levo**(A, B, C) znači da je trougao ABC pozitivne orjentacije (tj. tačka C "levo" od usmerene duži AB)

Konveksni omotač - brzi algoritam (reda $O(n \log n)$)

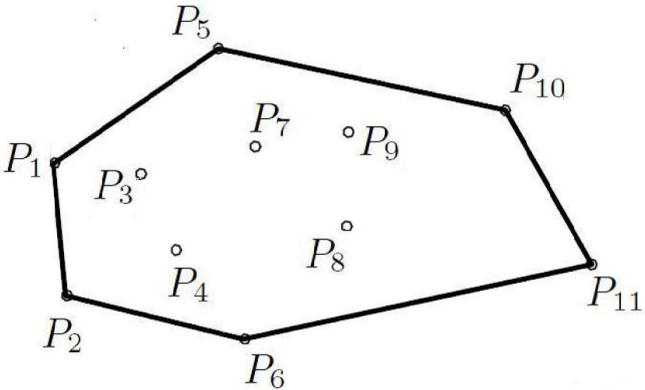
```
sortiraj P[i] po x koordinati
```

Konveksni omotač - brzi algoritam (reda $O(n \log n)$)

```
sortiraj P[i] po x koordinati
gornji = {P[1], P[2]};
for(i=3, i<= n, i++){
        gornji = dodaj(gornji, P[i]) = {Q[1] = P[1], ...Q[k], P[i]};
                                           // k zavisi od i
        while( k > 1 ili levo(P[i], Q[k-1], Q[k])){
                gornji = izbaci(gornji, Q[k]);
                k--;
        }
}
```

Konveksni omotač - brzi algoritam (reda $O(n \log n)$)

```
sortiraj P[i] po x koordinati
gornji = {P[1], P[2]};
for(i=3, i<= n, i++){
        gornji = dodaj(gornji, P[i]) = {Q[1] = P[1], ...Q[k], P[i]};
                                                // k zavisi od i
        while( k > 1 ili levo(P[i], Q[k-1], Q[k])){
                gornji = izbaci(gornji, Q[k]);
                k--;
        }
}
donji = {P[n], P[n-1]};
for(i=n-2, i>=1, i--){
        donji = dodaj(donji, P[i]) = {Q[1] = P[n], ...Q[k], P[i]};
        while( k > 1 ili levo(P[i], Q[k-1], Q[k])){
                donji = izbaci(donji, Q[k]);
                k--;
        }
}
CH = spoji(gornji, donji);
```


P_5
P_{10}
P_7
P_9
P_1
P_3
P_8
P_4
P_{11}
P_2
P_6