Zadatak 1 *Odrediti presek duži AB i CD, ako je:*

a) $A(2,1), B(4,0), C(0,2), D(5,1)$;

b) $A(1,0), B(7,4), C(4,2), D(13,8)$.

Zadatak 2 *a) Odrediti centar i poluprečnik kruga* $k: x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

b) Napisati parametrizaciju tog kruga.

Zadatak 3 *Odrediti presek kruga* $k: x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ *i prave* $x - y - 6 = 0$.

Svodjenje krive drugog reda na kanonski oblik

Kriva drugog reda je skup tačaka ravni čije koordinate (x, y) zadovoljavaju jednačinu drugog stepena

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

Teorema *Za svaku krivu (1) datu u ON reperu, postoji novi ON reper u čijim koordinatama* (x'', y'') *ona ima tačno jednu od jednačina:*

(E) $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$, *(elipsa),*

(H) $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$, *(hiperbola),*

(P) $y''^{\,2} = 2px''$, *(parabola),*

(D1) $\frac{x''^{\,2}}{a^2} + \frac{y''^{\,2}}{b^2} = -1$, *(prazan skup),*

(D2) $\frac{x''^{\,2}}{a^2} + \frac{y''^{\,2}}{b^2} = 0$, *(tačka),*

(D3) $\frac{x''^{\,2}}{a^2} - \frac{y''^{\,2}}{b^2} = 0$, *(dve prave koje se seku),*

(D4) $x''^{\,2} = a^2$, *(dve paralelne prave),*

(D5) $x''^{\,2} = 0$, *(''dvostruka'' prava),*

(D6) $x''^2 = -a^2$, (prazan skup),

gde je $p > 0, \;\; a \geq b \geq 0$.

Dokaz: Ako je $a_{12} \neq 0$, radimo **rotaciju** za ugao ϕ koji je dat sa:

$$\cot 2\phi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}},$$

$$\cos 2\phi = \frac{\cot 2\phi}{+\sqrt{1 + \cot^2 2\phi}},$$

$$\cos\phi = +\sqrt{\frac{1+\cos 2\phi}{2}}, \qquad \sin\phi = +\sqrt{\frac{1-\cos 2\phi}{2}}.$$

Zamenom jednačina rotacije

$$\begin{aligned} x &= \cos\phi x' - \sin\phi y' \\ y &= \sin\phi x' + \cos\phi y' \end{aligned} \tag{2}$$

u jednačinu krive (1) dobijamo jednačinu bez člana $x'y'$, recimo:

$$mx'^2 + ny'^2 + 2cx' + 2dy' + e = 0.$$

Sada se kriva svodi na kanonski oblik **translacijom**, tj. ”nameštanjem na pune kvadrate.” Ponekad je potrebno uraditi i jednostavnu **refleksiju**, tj. zamenu osa x i y. (kraj dokaza)

Primer 1 (ne treba ga znati uraditi) *Izometrijskom transformacijom svesti na kanonski oblik krivu drugog reda* $4x^2 + 9y^2 - 2x + 2y - 12xy - 19 = 0$.

Rešenje: *Primenom formula dobijamo da je* $\cos 2\phi = \frac{5}{13}$. *Odatle je* $\cos\phi = \frac{3}{Sqrt[13]}$ *i da je* $\sin\phi = \frac{2}{Sqrt[13]}$. *Zamenom jednačina rotacije dobijamo*

$$-\frac{2x'}{\sqrt{13}} + \frac{10y'}{\sqrt{13}} + 13y'^2 - 19 = 0.$$

Translacijom $x'' = x' + \frac{1618}{13\sqrt{13}}$, $y'' = y' + \frac{5}{13\sqrt{13}}$ *se dobija da je u pitanju parabola:*

$$y''^2 = \frac{2}{13\sqrt{13}}x''.$$

Zadatak 4 *Translacijom svesti krivu drugog reda na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč:*

a) $x^2 - 3y^2 - 4x - 18y - 23 = 0,$

b) $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y + 8 = 0.$

c) $3y^2 + 6y - x - 1 = 0.$

Bezierove krive

Neka su $P_0, P_1 \dots P_n$ tačke ravni. **Bezierova kriva** stepena n je

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i(t) P_i, \quad t \in [0,1].$$

Tačke P_i nazivaju se **kontrolne tačke**, a polinomi $B_i(t)$ **Bernštajnovi polinomi.**

Bezijerove krive stepena 2 i 3 su odredjene sa 3, odnosno 4 kontrolne tačke:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1];$$

$$\alpha_3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0,1].$$

Teorema *a) Početak krive α_2 je u tački P_0, a kraj u tački P_2. Tangentni vektori u tim tačkama su redom 2 $\overrightarrow{P_0P_1}$, odnosno 2 $\overrightarrow{P_1P_2}$.*
b) Početak krive α_3 je u tački P_0, a kraj u tački P_3. Tangentni vektori u tim tačkama su redom 3 $\overrightarrow{P_0P_1}$, odnosno 3 $\overrightarrow{P_2P_3}$.

Zadatak 5 *a) Date su tačke $A_0(1,7)$, $A_1(-3,3)$, $A_2(3,-3)$. Odrediti Bezijerovu krivu $\alpha(t), t \in [0,1]$ čije su to kontrolne tačke.*
b) Da li je tangenta te krive u tački $\alpha(\frac{1}{2})$ paralelna pravoj A_0A_2?

Zadatak 6 *Date su tačke $A_0(0,1)$, $A_1(1,2)$, $A_2(2,1)$, $A_3(1,0)$. Odrediti Bezijerovu krivu stepena 3 čije su to kontrolne tačke.*

Osobine Bezijerove krive:

- Bezierova kriva odredjena tačkama $A_0, \ldots, A_n$ leži unutar konveksnog omotača tih tačaka.

- Ni jedna prava ne preseca Bezierovu krivu više puta nego ťo seče kontrolnu poligonsku liniju $A_0 \ldots A_n$ (svojstvo najmanje varijacije).

- Afina invarijantnost.

- Algoritam De Casteljau.