Geometrija za informatičare
Matematički fakultet, Beograd

Vukmirović Srdjan

8. oktobar 2008.

1 Vektori, linearna nezavisnost, operacije sa vektorima

1.1 Definicija vektora

Pretpostavimo da je studentu poznata geometrija Euklidskog prostora koga označavamo sa $\mathbb{E}$. Kada želimo da istaknemo dimenziju n tog prostora onda ga označavamo sa $\mathbb{E}^n$, pri čemu su nam najinteresantniji slučajevi ravni $n = 2$ i prostora $n = 3$.

Sada ćemo da pridružimo prostoru tačaka E^n prostor vektora V^n. Vektore uvodimo kao klase ekvivalencija usmerenih duži.

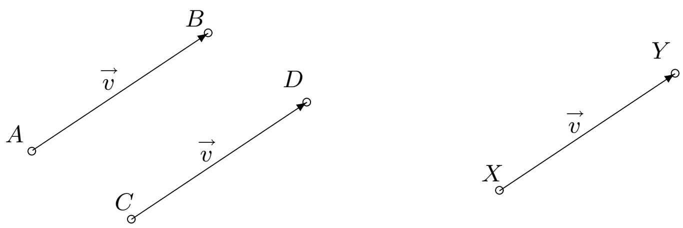
Usmerenu duž čije je početak tačka A, a kraj tačka B označavamo sa AB. Kažemo da usmerene duži AB i CD imaju isti *pravac* ako su prave odredjene tim dužima iste ili paralelne. Da bi izbegli preteran formalizam pojam *smera* usmerene duži shvatat ćemo intuitivno. Naime, podrazumevaćemo da skup paralelnih pravih (duži) ima tačno dva smera.

Kažemo da dve usmerene duži AB i CD predstavljaju isti vektor ako imaju isti pravac, smer i intenzitet, a duži zovemo *predstavnicima* tog vektora. Vektor čiji je predstavnik usmerena duž AB označavamo sa $\overrightarrow{AB}$. Ako nam predstavnik nije bitan, vektore označavamo i malim slovima latinice: $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ ... Pravac, smer i intenzitet (dužina) vektora su odredjeni ma kojim njegovim predstavnikom. Intenzitet vektora $\overrightarrow{a}$ označavamo sa $| \overrightarrow{a} |$.

Medju vektorima se posebno ističe *nula vektor* koji označavamo sa $\overrightarrow{0}$ i koji je predstavnik duži AA, tj. $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{AA}$ za ma koju tačku A. Nula vektor ima intenzitet 0, a pravac i smer mu nisu definisani.

Primetimo da za svaku tačku A i svaki vektor $\overrightarrow{v}$ postoji jedinstvena tačka B takva da je $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}$, tj. da svaki vektor ima jedinstvenog predstavnika sa početkom u datoj tački X. Izbor takve tačke A uvodi bijekciju $f : B \mapsto \overrightarrow{v}$ izmedju skupa tačaka i skupa vektora.

Može se pokazati da su usmerene duži koje imaju isti pravac, smer i intenzitet u relaciji, koja je relacija ekvivalencije, tj. refleksivna je, simetrična i tranzitivna. Na taj način *vektori su klase ekvivalencije usmerenih duži.*



Slika 1: Ekvivalentne usmerene duži

Vektore nazivamo **kolinearnim** ako imaju isti pravac, a **koplanarnim** ako su njihovi predstavnici paralelni nekoj ravni.

1.2 Linearne operacije sa vektorima

Definišimo sada linearne operacije nad vektorima: sabiranje vektora i množenje vektora brojem (skalarom).

1.2.1 Sabiranje vektora

Vektore sabiramo tzv. "nadovezivanjem". Neka su $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}$ vektori predstavljeni sa $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$. **Zbir vektora** $\vec{v}$ i $\vec{u}$ je vektor

$$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AC} .$$

Treba dokazati da ovako definisana operacija ne zavisi od izbora predstavnika vektora. Neka su $\vec{v} = \overrightarrow{A'B'}$ $\vec{u} = \overrightarrow{B'C'}$ drugi predstavnici ta dva vektora. Važi $\angle(AB, BC) = \angle(A'B', B'C')$ jer su to uglovi sa paralelnim kracima, a tokodje važi $|AB| = |A'B'|$ i $|BC| = |B'C'|$. Zato su trouglovi ABC i $A'B'C'$ podudarni, pa je $|AC| = |A'C'|$. Dakle, duži AC i $A'C'$ imaju isti intenzitet. Kako su $ABB'A'$ i $BCC'B'$ paralelogrami, važi $AA' \parallel BB'$, $BB' \parallel CC'$, pa je $AA' \parallel CC'$. Kako je i $|AC| = |A'C'|$ sledi da je $ACC'A'$ paralelogram, pa je $AC \parallel A'C'$, tj. AC i $A'C'$ imaju isti pravac. Kako te dve duži imaju i isti smer one predstavljaju isti vektor, tj. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, pa je definicija sabiranja vektora dobro definisana.

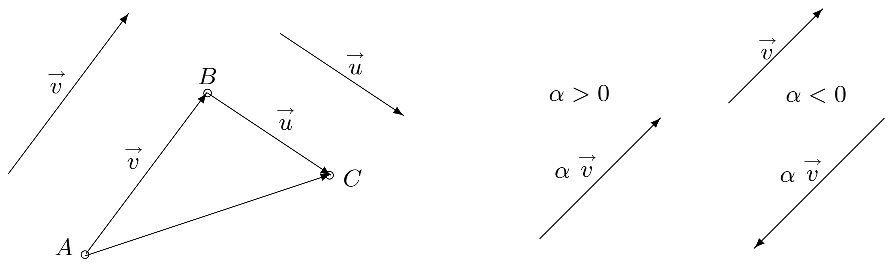
Primetimo da za nula vektor važi

$$\vec{v} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{v} . \tag{1}$$

1.2.2 Množenje vektora brojem (skalarom)

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ realan broj i $\vec{v} \in \mathbb{V}$ vektor. **Proizvod** $\alpha \vec{v}$ **broja i vektora** je vektor $\vec{u}$ koji ima isti pravac kao vektor $\vec{v}$, $|\vec{u}| = |\alpha||\vec{v}|$, a smer vektora $\vec{u}$ je isti, odnosno suprotan smeru vektora $\vec{v}$ ako je $\alpha > 0$, odnosno $\alpha < 0$.

Može se pokazati da ova operacija ne zavisi od izbora vektora predstavnika.



Slika 2: Linearne operacije sa vektorima

Razlika dva vektora

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-1)\ \vec{u}$$

je zbir vektora $\vec{v}$ i vektora $-1\vec{u} = -\vec{u}$ suprotnog vektoru $\vec{u}$.

1.3 Prostor vektora kao vektorski prostor

Sledećom teoremom se pokazuje da je skup vektora $\mathbb{V}$ sa upravo definisanim operacijama sabiranja i množenja brojem, vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ koji ste izučavali u kursu Linearna algebra.

Teorema 1.1 *Ako su $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ vektori, a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ realni brojevi tada je:*

(S1)	$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$,	*(M1)*	$\alpha(\vec{v} + \vec{u}) = \alpha\ \vec{v} + \alpha\ \vec{u}$,
(S2)	$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$,	*(M2)*	$\alpha(\beta\ \vec{v}) = (\alpha\beta)\ \vec{v}$,
(S3)	$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$,	*(M3)*	$(\alpha + \beta)\ \vec{v} = \alpha\ \vec{v} + \beta\ \vec{v}$,
(S4)	$\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$;	*(M4)*	$1\ \vec{v} = \vec{v}$.

Dokaz:

(S1) Neka su $A, B, C, D \in \mathbb{E}$ tačke takve da važi: $\vec{v} = AB$, $\vec{u} = BC$, $\vec{w} = CD$. Tada je:

$$\begin{aligned} \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) &= \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD} = \\ &= \vec{AC} + \vec{CD} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}\ . \end{aligned}$$

(S2) Jedan deo ovog tvrdjenja je dokazan u formuli (1). Drugi deo se dokazuje slično.

Ostatak tvrdjenja se ostavlja za vežbu čitaocu. □

Primetimo da na osnovu aksioma (S1)-(S4) sledi da je svaki vektorski prostor Abelova grupa u odnosu na sabiranje vektora.

1.4 Vežbanja

1.1 *Dokazati da su sledeća tvrdjena ekvivalentna:*

a) $\vec{AB} = \vec{CD}$*;*

b) duži AD i BC se polove.

1.2 *Dokazati preostala tvrdjenja Teoreme 1.1.*

1.5 Linearna nezavisnost vektora

Podsetimo se pojma linearne nezavisnosti vektora iz kursa Linearna algebra.

Ako su $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ brojevi, a $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ vektori, tada se izraz

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \dots + \alpha_n \vec{v_n}$$

naziva **linearna kombinacija vektora**.

Definicija 1.1 *Vektori $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ su* **linearno nezavisni** *ako iz relacije*

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \dots + \alpha_n \vec{v_n} = \vec{0}$$

sledi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. U suprotnom, kada je bar jedan od brojeva α_i različit od nule vektori se nazivaju **linearno zavisnim**.

Vidimo da su vektori linearno zavisni ako se neki vektor može izraziti preko ostalih. Recimo, za $\alpha_1 \neq 0$

$$\vec{v_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{v_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \vec{v_n} .$$

Ako je neki vektor nula vektor, recimo $\vec{v_1} = \vec{0}$ tada je

$$\vec{v_1} + 0 \vec{v_2} + \dots + 0 \vec{v_n} = \vec{0},$$

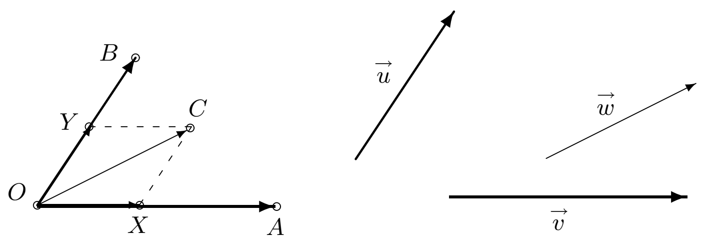
pa je $\alpha_1 = 1 \neq 0$ i vektori su linearno zavisni.

Sledeća teorema sledi direktno iz definicije množenja vektora brojem.

Teorema 1.2 *Dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{u}$ su linearno zavisni ako i samo ako su kolinearni.*

Teorema 1.3 *U vektorskom prostoru $\mathbb{V}^2$ postoje dva linearno nezavisna vektora, a svaka tri vektora su linearno zavisna.*

Dokaz: Ako su $O, A, B \in \mathbb{E}^2$ tri nekolinearne tačke tada su vektori $\vec{OA}$ i $\vec{OB}$ linearni nezavisni, jer su nekolinearni.



Slika 3: Zavisnost vektora u ravni

Neka su $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^2$ tri nenula vektora od kojih nikoja dva nisu linearno zavisna. Neka su $O, A, B, C \in \mathbb{E}^2$ tačke takve da $\vec{v} = \vec{OA}$, $\vec{u} = \vec{OB}$, $\vec{w} = \vec{OC}$. Prave OA, OB i OC su različite, pa postoje tačke $X \in OA$ i $Y \in OB$ takve da je $OXCY$ paralelogram. Tada važi:

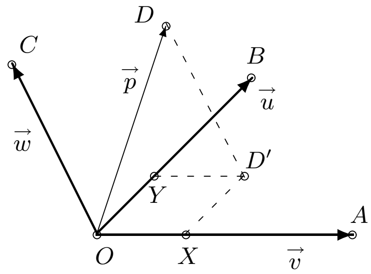
$$\vec{w} = \vec{OC} = \vec{OX} + \vec{XC} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{u},$$

pa su vektori $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ linearno zavisni. $\square$

Posledica 1.1 *Vektori* $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ *su linearno zavisni ako i samo ako su koplanarni.*

Teorema 1.4 *U vektorskom prostoru* $\mathbb{V}^3$ *postoje tri linearno nezavisna vektora, a svaka četiri vektora su linearno zavisna.*

Dokaz: Ako su O, A, B, C četiri nekoplanarne tačke tada su vektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ nekomplanarni, pa su i linearno nezavisni.



Slika 4: Zavisnost vektora u prostoru

Neka su $\vec{v}=\overrightarrow{OA}, \vec{u}=\overrightarrow{OB}, \vec{w}=\overrightarrow{OC}, \vec{p}=\overrightarrow{OD} \in \mathbb{V}^3$ četiri nenula vektora. Ako su neka tri koplanarna onda su i linearno zavisna, pa zato pretpostavimo da su svaka tri vektora nekomplanarni.

Neka je D' tačka ravni OAB takva da je $DD' \parallel OC$ i X, Y tačke, redom, pravih OA i OB takve da je $OXD'Y$ paralelogram. Tada je:

$$\vec{p}=\overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D}= (\alpha\, \overrightarrow{OA} + \beta\, \overrightarrow{OB}) + \gamma\, \overrightarrow{OC}= \alpha\, \vec{v} + \beta\, \vec{u} + \gamma\, \vec{w},$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

1.6 Vežbanja

1.3 *U odnosu na tačku O dati su vektori položaja $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ tačaka A i B ($A \neq B$). Izraziti vektor položaja tačke C takve da*

a) $\overrightarrow{AC}= \lambda\, \overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$;

b) tačka C deli duž AB u odnosu $p : q$, $p, q \in \mathbb{N}$.

1.4 *Neka je ABC trougao i tačka T takva da važi* $\overrightarrow{OT}= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

a) Dokazati da tačka T ne zavisi od izbora tačke O.

b) Dokažati da je tačka O težište trougla, tj. presek težišnih duži i da ona tetežišne duži deli u odnosu $2 : 1$.

1.5 *Neka je $ABCD$ tetraedar i tačka T takva da važi* $\overrightarrow{OT}= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. *Težišnom duži tetraedra naziva se duž koja spaja teme tetraedra sa težištem naspramne pljosni. Dokazati da se težišne duži tetraedra seku u tački T i da ih ona deli u odnosu* $3 : 1$. *Tačka T se naziva* **težište tetraedra**.

1.6 *Dat je paralelogram $ABCD$. Ako je tačka F središte stranice BC, tačka G središte stranice CD, a tačka E presek duži AF i BG. Odrediti odnose* $\frac{AE}{EF}$ *i* $\frac{BE}{EG}$.

1.7 *U ravni je dat trougao ABC. Neka tačka D pripada stranici AB, a tačka E stranici BC, tako da je* $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ *i* $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$. *Ako se duži AE i CD seku u tački F odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AE i CD.*

1.7 Koordinate vektora

Podsetimo se iz Linearne algebre da je baza vektorskog prostora maksimalan skup linearno nezavisnih vektora, a dimenzija prostora broj elemenata baze.

Na osnovu teorema 1.3 i **??** dimenzija prostora vektora ravni $\mathbb{V}^2$ je dva, a dimenzija vektora prostora V^3 je tri.

Na osnovu dokaza Teoreme 1.3 svaki vektor $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ može da se napiše u obliku

$$\vec{v} = v_1 \vec{e_1} + v_2 \vec{e_2}, \tag{2}$$

gde je $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ neka baza. Ako je $\vec{v} = v_1' \vec{e_1} + v_2' \vec{e_2}$ dobijamo

$$(v_1 - v_1') \vec{e_1} + (v_2 - v_2') \vec{e_2} = \vec{0},$$

odakle zbog nezavisnosti vektora $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ važi $v_1 = v_1'$ i $v_2 = v_2'$. Dakle, brojevi v_1 i v_2 su jedinstveni za dati vektor $\vec{v}$. Njih nazivamo **koordinate vektora** $\vec{v}$ **u bazi** e i koristimo oznaku

$$[\vec{v}]_e = (v_1, v_2).$$

Slično je sa vektorima prostora gde na osnovu Teoreme 1.4 za ma koji vektor prostora $v \in V^3$ množemo pisati

$$\vec{v} = v_1 \vec{e_1} + v_2 \vec{e_2} + v_3 \vec{e_3}, \tag{3}$$

gde je $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ neka baza vektorskog prostora $\mathbb{V}^3$. Brojevi $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ su za dati vektor $\vec{v}$ jedinstvene **koordinate vektora** $\vec{v}$ **u bazi** e. Pišemo

$$[\vec{v}]_e = (v_1, v_2, v_3).$$

Primetimo da se koordinate ponašaju "linearno", tj.

$$[\vec{v} + \vec{u}]_e = [\vec{v}]_e + [\vec{u}]_e, \qquad [\alpha \vec{v}]_e = \alpha[\vec{v}]_e,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.8 Vežbanja

1.8 *Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$. Ako je data baza $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, $\vec{e_1} = \vec{AB}, \vec{e_2} = \vec{AF}$, odrediti koordinate vektora $\vec{DD}$, $\vec{DC}$, $\vec{DB}$, $\vec{DA}$, $\vec{DF}$ i $\vec{DE}$ u bazi e.*

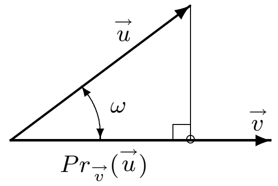
2 Vektorska algebra

2.1 Skalarni proizvod

Neka su $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}$ vektori i $\vec{v} \neq \vec{0}$. **Projekcija vektora** $\vec{u}$ **na vektor** $\vec{v}$ je broj

$$Pr_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos\phi,$$

gde je $\phi \in [0, \pi)$ ugao izmedju vektora $\vec{v}$ i $\vec{u}$. Vidimo da je projekcija pozitivan, nula odnosno negativan broj ako je ugao izmedju vektora oštar, prav ili tup.



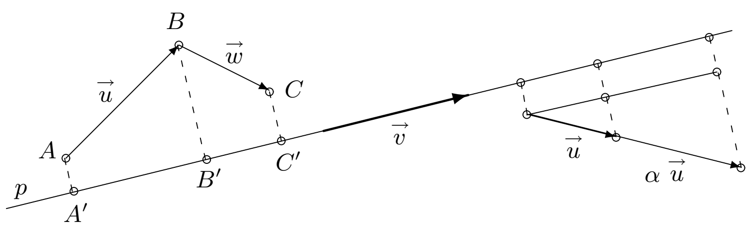
Slika 5: Projekcija vektora

Sledećom lemom se dokazuju osobine projekcije koje će nam trebati nešto kasnije.

Lema 2.1 *Neka su* $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{E}$ *vektori i* $\alpha \in \mathbb{R}$ *broj. Tada važi*
1) $Pr_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w}) = Pr_{\vec{v}}(\vec{u}) + Pr_{\vec{v}}(\vec{w})$,
2) $Pr_{\vec{v}}(\alpha \vec{u}) = \alpha Pr_{\vec{v}}(\vec{u})$

Dokaz: 1) Neka predstavnik vektora $\vec{v}$ pripada pravoj p, neka je $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{w}=\overrightarrow{BC}$ i neka su A', B', C' ortogonalne projekcije tačaka A, B, C na pravu p. Tada je $Pr_{\vec{v}}(\vec{u}) = \pm|A'B'|$ u zavisnosti da li je ugao $\angle(\vec{v}, \vec{u})$ oštar ili tup. Slično je i sa projekcijama vektora $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$. Pretpostavimo da su svi uglovi oštri (čitaocu se ostavlja da proveri ostale slučajeve).

$$Pr_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w}) = |A'C'| = |A'B'| + |B'C'| = Pr_{\vec{v}}(\vec{u}) + Pr_{\vec{v}}(\vec{w}).$$



Slika 6: Osobine projekcije vektora

2) Važi

$$\begin{aligned} Pr_{\vec{v}}(\alpha \vec{u}) &= |\alpha \vec{u}| \cos\angle(v, \alpha u) = |\alpha|| \vec{u} |(\pm \cos\angle(v, u)) = \\ &= \alpha| \vec{u} |(\cos\angle(v, u)) = \alpha Pr_{\vec{v}}(\vec{u}), \end{aligned}$$

gde se znak $+$ uzima ako je $\alpha > 0$, a znak $-$ ako je $\alpha < 0$ (slučaj $\alpha = 0$ je trivijalno zadovoljen). □

Definicija 2.1 *Skalarni proizvod vektora je operacija* $\cdot : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *koja dvama vektorima* $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}$ *dodeljuje broj*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}| \cos\phi,$$

gde je $\phi \in [0, \pi)$ *ugao izmedju vektora* $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$*.*

Nekad se za skalarni proizvod koristi i oznaka $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ ili $(\vec{v}, \vec{u})$.
Da bismo dokazali narednu teoremu, primetimo da važi

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}| \cos\phi = |\vec{v}| Pr_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| Pr_{\vec{u}}(\vec{v}).$$

Teorema 2.1 (Osobine skalarnog proizvoda) *Neka su* $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Tada važi:*

1) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

2) $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$,

3) $\vec{v} \cdot (\alpha \vec{u}) = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{u})$,

4) $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \geq 0$,

5) $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ *ako i samo ako je* $\vec{v} = \vec{0}$.

Dokaz: Osobine 1, 4 i 5 slede direktno iz definicije.

Dokažimo tvrdjenje 2). Ako je $\vec{v} = \vec{0}$ tvrdjenje se neposredno proverava, pa pretpostavimo $\vec{v} \neq \vec{0}$. Tada, na osnovu Leme 2.1 (1) važi:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) &= |\vec{v}| Pr_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w}) = |\vec{v}| (Pr_{\vec{v}}(\vec{u}) + Pr_{\vec{v}}(\vec{w})) = \\ &= |\vec{v}| Pr_{\vec{v}}(\vec{u}) + |\vec{v}| Pr_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Tvrdjenje 3) se dokazuje slično na osnovu Leme 2.1 (2) i ostavlja se za vežbu čitaocu. □

Kombinovanje osobina 2) i 3) daje nam osobinu **linearnosti** (po drugom argumentu) skalarnog proizvoda

$$\vec{v} \cdot (\alpha \vec{u} + \beta \vec{w}) = \alpha \vec{v} \cdot \vec{u} + \beta \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Zbog osobine simetričnosti 1), skalarni proizvod je linearan i po prvom argumentu, tj. važi

$$(\alpha \vec{v} + \beta \vec{u}) \cdot \vec{w} = \alpha \vec{v} \cdot \vec{w} + \beta \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

2.1.1 Skalarni proizvod u ortonormiranoj bazi

Podsetimo se da je **ortonormirana baza** takva baza $e = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ da važi

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \begin{cases} 0 & \text{ako je} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{ako je} \quad i = j. \end{cases}$$

Drugim rečima, bazni vektori su medjusobno ortogonalni i svaki vektor je jedinične dužine.

Neka je sada, primera radi $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{V}^2$ i $\vec{v} = v_1 \vec{e_1} + v_2 \vec{e_2}$, $\vec{u} = u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2}$ dva vektora. Tada, na osnovu linearnosti, važi:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{u} &= (v_1 \vec{e_1} + v_2 \vec{e_2}) \cdot (u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2}) = \\ &= v_1 u_1 \vec{e_1} \cdot \vec{e_1} + v_1 u_2 \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + v_2 u_1 \vec{e_2} \cdot \vec{e_1} + v_2 u_2 \vec{e_2} \cdot \vec{e_2} = \\ &= v_1 u_1 + v_2 u_2, \end{aligned} \tag{4}$$

pri čemu smo za poslednju jednakost koristili ortonormiranost baze.

Na sličan se način pokazuje je skalarni proizvod vektora $\vec{v} = v_1 \vec{e_1} + v_2 \vec{e_2} + v_3 \vec{e_3}$ i $\vec{u} = u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2} + u_3 \vec{e_3}$ prostora $\mathbb{V}^3$, u ortonormiranoj bazi $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, dat izrazom

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \tag{5}$$

u ortonormiranoj bazi. Taj se izraz lako upoštava i na proizvoljnu dimenziju.

2.1 *Dati su vektori* $\vec{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ *i* $\vec{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ *iz* $\mathbb{V}^3$ *svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a)* $|\vec{v}|$; *b)* $\angle(\vec{v}, \vec{u})$.

2.2 *Dokazati da simetrala ugla u trouglu deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana.*

2.3 *Neka je A' podnožje visine iz temena A trougla ABC. Odrediti vektor $\overrightarrow{AA'}$ preko vektora ivica $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.*

2.4 *Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).*

2.2 Orjentacija

Orjentacija je složen i interesantan matematički pojam. U ovom momentu uvešćemo je intuitivno, ali ćemo kasnije, u poglavlju o poliedarskim površima dati strožiju definiciju orjentacije. Tada ćemo pokazati da nije na svakom prostoru moguće uvesti orjentaciju. Ipak, na vektorskim prostorima jeste.

Prvo uvodimo orjentaciju u vektorskom prostoru $\mathbb{V}^2$ vektora ravni. Kažemo da je baza $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ **pozitivne orjenacije** ako je pravac rotacije od vektora $\overrightarrow{e_1}$ ka vektoru $\overrightarrow{e_2}$, kraćim putem, suprotan od kretanja kazaljke na časovniku. U suprotnom je baza e negativne orjentacije.

Sada uvodimo orjentaciju medju vektorima prostora. Neka je baza $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ prostora $\mathbb{V}^3$ predstavljena usmerenim dužima sa istim početkom. Kažemo da je e **baza pozitivne orjentacije** ako je, posmatrano sa kraja vektora $\overrightarrow{e_3}$, kretanje kraćim putem od vektora $\overrightarrow{e_1}$ prema vektoru $\overrightarrow{e_2}$ suprotno od pravca kretanja kazaljki na časovniku. Drugačije rečeno, ako gledajući sa kraja vektora $\overrightarrow{e_3}$ bazu $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ vidimo kao pozitivnu, onda je i baza $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ pozitivne orjentacije.

Ista orjentacija se može intuitivno uvesti i na druge načine, recimo **pravilom desne ruke** ili **pravilom zavrtnja**.

Orjentacija je stvar dogovora, tj. ne postoji naročit razlog zbog kog jednu orjentaciju zovemo pozitivnom, a drugu negativnom.

2.3 Vektorski proizvod i mešoviti proizvod

Definicija 2.2 *Vektorski proizvod je operacija $\times : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ koja dvama vektorima $\vec{v}$ i $\vec{u}$ dodeljuje vektor $\vec{v} \times \vec{u}$ kome su intenzitet, pravac i smer odredjeni sa:*

(I) $|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}||\vec{u}| \sin\phi$, *gde je $\phi \in [0, \pi)$ ugao izmedju $\vec{v}$ i $\vec{u}$.*

(P) vektor $\vec{v} \times \vec{u}$ je normalan na svaki od vektora $\vec{v}$ i $\vec{u}$.

(S) smer vektora $\vec{v} \times \vec{u}$ je takav da je baza $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u})$ pozitivne orjentacije.

Primetimo da je na osnovu (I) intenzitet vektorskog proizvoda jednak površini paralelograma razapetog vektorima koje množimo. Kako nezavisni vektori i samo oni razapinju paralelogram dobijamo da

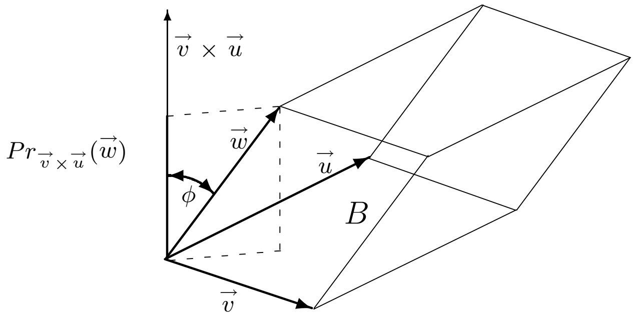
vektori $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3$ su linearno nezavisni ako i samo ako $\vec{v} \times \vec{u} \neq \vec{0}$.

Na osnovu toga, vidimo da uslov (S) ima smisla, tj. da je $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u})$ samo ako je $\vec{v} \times \vec{u} \neq 0$.

Definicija 2.3 (Mešoviti proizvod) *Mešoviti proizvod je operacija $[] : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ koji trima vektorima $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ dodeljuje broj*

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] := (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}$$

Teorema 2.2 *Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda jednaka je površina paralelepipeda odredjenog vektorima* $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ *.*



Slika 7: Geometrijski smisao mešovitog proizvoda

Dokaz: Neka je osnova paralelepipeda paralelogram odredjen vektorima $\vec{v}$ i $\vec{u}$, čija je površina $B = |\ \vec{v} \times \vec{u}\ |$. Visina h paralelepipeda jednaka je projekciji vektora $\vec{w}$ na vektor $\vec{v} \times \vec{u}$ koji je normalan na osnovu. Označimo sa ϕ ugao izmedju vektora $\vec{w}$ i vektora $\vec{v} \times \vec{u}$. Tada je zapremina V paralelepipeda

$$
\begin{aligned}
V &= Bh = |\ \vec{v} \times \vec{u}\ ||Pr_{\vec{v}\times\vec{u}}(\vec{w})| = |\ \vec{v} \times \vec{u}\ ||\ \vec{w}\ ||\cos\phi| = \\
&= |(\vec{v} \times \vec{u})\cdot \vec{w}\ | = |[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]|.
\end{aligned}
$$

□

Posledica 2.1 *Kako se paralelepiped može razložiti na 6 tetraedara jednake zapremine dobijamo da se* **zapremina tetraedra** *ABCD jednaka:*

$$V = \frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}].$$

Kako nezavisni vektori i samo oni razapinju paralelogram dobijamo da

vektori $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ **su linearno nezavisni ako i samo ako** $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0.$

Sada dajemo tvrdjenje koje se često koristi. Mi ćem oga koristiti za dokazivanje linearnosti vektorskog proizvoda, nešto kasnije.

Lema 2.2 *Ako za vektore* $\vec{v}, \vec{u} \in V$ *važi* $\vec{v} \cdot \vec{t} = \vec{u} \cdot \vec{t}$ *za svako* $\vec{t} \in V$*, tada je* $\vec{v} = \vec{u}$*.*

Dokaz: Iz pretpostavke dobijamo

$$0 = \vec{v} \cdot \vec{t} - \vec{u} \cdot \vec{t} = (\vec{v} - \vec{u})\cdot \vec{t}\ .$$

Uzmemo li sada $\vec{t} = \vec{v} - \vec{u}$ dobijamo da je $|\ \vec{v} - \vec{u}\ | = 0$, tj. $\vec{v} - \vec{u} = \vec{0}$, odakle sledi tvrdjenje. □

Algebarske osobine vektorskog i mešovitog proizvoda date su sledećom teoremom.

Teorema 2.3 *Za vektore* $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *važi:*

1) $\vec{v} \times \vec{u} = -\ \vec{u} \times \vec{v}$ *(antisimetričnost),*

2) $(\alpha \vec{v} + \beta \vec{u}) \times \vec{w} = \alpha(\vec{v} \times \vec{w}) + \beta(\vec{u} \times \vec{w})$ *(linearnost),*
3) $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$,
4) $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$,
5) $[\alpha \vec{v} + \beta \vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = \alpha[\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}] + \beta[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$ *(linearnost).*

Dokaz: Tvrdjenje 1) sledi iz definicije vektorskog proizvoda, a tvrdjenje 3) iz tvrdjenja 1) i definicije mešovitog proizvoda.

4) Ako su vektori $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ zavisni tada im je mešoviti proizvod jednak nuli pa tvrdjenje važi. Ako su nezavisni, baze $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ i $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ su uvek iste orjentacije. Takodje, $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} > 0$ ako i samo ako vektori $\vec{v} \times \vec{u}$ i $\vec{w}$ grade oštar ugao, tj. pripadaju istom poluprostoru odredjenom vektorima $\vec{v}$ i $\vec{u}$. Dakle $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] > 0$ ako i samo ako je $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ baza pozitivne orjentacije. Zato su ta tri mešovita proizvoda istoga znaka. Pošto te trojke vektora odredjuju isti paralelopiped, apsolutne vrednosti mešovitih proizvoda su im jedake (jednake su zapremini paralelopipeda po Teoremi 2.2), pa tvrdjenje važi.

5) Na osnovu dokazanog pod 4) i liearnosti skalarnog proizvoda, važi

$$\begin{aligned}
[\alpha \vec{v} + \beta \vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] &= [\vec{w}, \vec{t}, \alpha \vec{v} + \beta \vec{u}] = (\vec{w} \times \vec{t}) \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{u}) = \\
&= \alpha(\vec{w} \times \vec{t}) \cdot \vec{v} + \beta(\vec{w} \times \vec{t}) \cdot \vec{u} = \\
&= \alpha[\vec{w}, \vec{t}, \vec{v}] + \beta[\vec{w}, \vec{t}, \vec{u}] = \alpha[\vec{v}, \vec{w}, \vec{t}] + \beta[\vec{u}, \vec{w}, \vec{t}].
\end{aligned}$$

2) Ovo tvrdjenje sada direktno sledi iz tvrdjenja 5) i Leme 2.2. □

2.4 Vektorski i mešoviti proizvod u koordinatama

Vektorski i mešoviti proizvod se najlakše računaju u ortonormiranoj bazi. Pretposavimo zato da je $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ ortonormirana baza pozitivne orjentacije.

Zbog linearnosti vektorskog proizvoda, dovoljno je izračunati vektorski proizvod na baznim vektorima, koji je dat tablicom:

$\times$	$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$	$\vec{e_3}$
$\vec{e_1}$	$\vec{0}$	$\vec{e3}$	$-\vec{e_2}$
$\vec{e_2}$	$-\vec{e_3}$	$\vec{0}$	$\vec{e_1}$
$\vec{e_3}$	$\vec{e_2}$	$-\vec{e_1}$	$\vec{0}$

Neka su $\vec{v} = v_1 \vec{e_1} + v_2 \vec{e_2} + v_3 \vec{e_3}$, $\vec{u} = u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2} + u_3 \vec{e_3}$ dva vektora prostora $\mathbb{E}^3$

Zbog linearnosti njihov vektorski proizvod je odredjen proizvodima baznih vektora, pa dobijamo

$$\vec{v} \times \vec{u} = (v_2u_3 - v_3u_2) \vec{e_1} + (v_3u_1 - v_1u_3) \vec{e_2} + (v_1u_2 - v_2u_1) \vec{e_3} .$$

Ta jednakost se često zapisuje simboličkom determinantom:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

Neka je $\vec{w} = w_1 \vec{e_1} + w_2 \vec{e_2} + w_3 \vec{e_3}$ treći vektor. Lako se proverava da je mešoviti proizvod tri vektora dat sa

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = v_2u_3w_1 - v_3u_2w_1 + v_3u_1w_2 - v_1u_3w_2 + v_1u_2w_3 - v_2u_1w_3,$$