Zadatak 1 *Dokazati da simetrala ugla u trouglu deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana.*

Zadatak 2 *Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).*

Dvostruki vektorski proizvod

Važi formula za **dvostruki vektorski proizvod**

$$\overrightarrow{v} \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}) \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) \overrightarrow{w}.$$

Kako je ovaj izraz različit od $(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{w}$ koji se izražava preko $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{u}$, vidimo da vektorski proizvod **nije asocijativan**.

Zadatak 3 *Dati su vektori:* $\overrightarrow{v} = (3, 2, 1), \overrightarrow{u} = (1, -5, 0), \overrightarrow{w} = (0, 4, -1)$ *svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi pozitivne orjentacije. Izračunati* $\overrightarrow{v} \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w})$ *na dva načina*

a) upotrebom formule za dvostuki vektorski proizvod

b) korišćenjem samo vektorskog proizvoda.

Transformacije koordinata tačaka

Pretpostavimo da su data dva koordinatna sistema Oe i $O'f$. Neka su bazni vektori vezani relacijama

$$\overrightarrow{f_1} = c_{11}\,\overrightarrow{e_1} + c_{21}\,\overrightarrow{e_2}, \quad \overrightarrow{f_2} = c_{12}\,\overrightarrow{e_1} + c_{22}\,\overrightarrow{e_2}$$

Matrica $C = (c_{ij})$ je tzv. **matrica prelaska** sa baze e na bazu f. Neka su koordinate novog koord. početka su $[O']_{Oe} = (b_1, b_2)$.

Za koordinate proizvoljne tačke M u tim sistemima važi:

$$(x, y) = [M]_{Oe} = [\overrightarrow{OM}]_e, \quad \text{odnosno} \quad \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2},$$

$$(x', y') = [M]_{O'f} = [\overrightarrow{O'M}]_f, \quad \text{odnosno} \quad \overrightarrow{O'M} = x'\,\overrightarrow{f_1} + y'\,\overrightarrow{f_2}\,.$$

Odatle imamo

$$\begin{aligned}
x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = b_1\,\overrightarrow{e_1} + b_2\,\overrightarrow{e_2} + x'\,\overrightarrow{f_1} + y'\,\overrightarrow{f_2} = \\
&= b_1\,\overrightarrow{e_1} + b_2\,\overrightarrow{e_2} + x'(c_{11}\,\overrightarrow{e_1} + c_{21}\,\overrightarrow{e_2}) + y'(c_{12}\,\overrightarrow{e_1} + c_{22}\,\overrightarrow{e_2}) = \\
&= (c_{11}x' + c_{12}y' + b_1)\,\overrightarrow{e_1} + (c_{21}x' + c_{22}y' + b_2)\,\overrightarrow{e_2}
\end{aligned}$$

Zato važe formule:

$$\begin{aligned}
x &= c_{11}x' + c_{12}y' + b_1, \\
y &= c_{21}x' + c_{22}y' + b_2.
\end{aligned}$$

Te formule predstavljaju **transformaciju koordinata tačaka ravni**, tj. vezu koordinata (x, y) i (x', y') iste tačke M u dva različita koordinatna sistema. Matrično ih zapisujemo ovako:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

Primer 1 *Neka je $OABC$ paralelogram i $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, $f = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CA})$ dve baze. Odrediti formule transformacija koordinata u reperima Oe i Bf, kao i inverzne formule.*

Transformacije koordinata ortonormiranih repera

Formule transformacija koordinata ravni iz ortonormiranog repera Oe u ortonormiran reper $O'f$ iste orjentacije su:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Ovo je kompozicija **rotacije** za ugao ϕ i **translacije** za vektor (q_1, q_2).

Ukoliko su reperi različitih orjentacija formule su:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Ovo je kompozicija **refleksije** koja gradi ugao $\frac{\phi}{2}$ sa x-osom i **translacije** za vektor (q_1, q_2).

Afina preslikavanja

Definicija 1 Afino preslikavanje ravni *je preslikavanje koje tački* $M(x, y)$ *preslikava u tačku* $M'(x', y')$ *po pravilu*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

uz uslov $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Algebarski gledano, formule afinih preslikavanja su istog oblika kao formule transformacija koordinata.

Kolone matrice su slike baznih vektora pri tom preslikavanju, a (q_1, q_2) je slika kooridnatnog početka.

Slično se definiše i **afino preslikavanje prostora.**

Teorema (Osobine afinih preslikavanja ravni) Bijekcije su;

Preslikavaju **prave** *na prave, a* **krive drugog reda** *na krive drugog reda;*

Čuvaju razmeru *tri tačke;*

Čuvaju paralelnost. *Dakle, slika paralelograma je paralelogram.*

Afinim preslikavanjem **možemo preslikati proizvoljan trougao na proizvoljan drugi trougao.**

Odnos zapremina *neke figure i njene slike pri afinom preslikavanju je* $V(\mathcal{F}') : V(\mathcal{F}) = |\det A|$.

Primer 2 *Date su tačke* $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$; $A'(4,5)$, $B'(8,7)$, $C'(6,9)$, $D'(2,7)$.

1) Odrediti jednačine afinog preslikavanja koje kvadrat $ABCD$ *preslikava u paralelogram* $A'B'C'D'$.

2) Odrediti jednačinu slike kruga upisanog u kvadrat.

3) Kolika je površina slike kruga.

Predstavljanje afinih preslikavanja matricama

Afino preslikavanje

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

možemo predstaviti matricom:

$$A_q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Teorema Proizvod matrica (5) odgovara kompoziciji afinih preslikavanja. *Drugim rečima, podgrupa svih matrica oblika (5) je izomorfna podgrupi afinih preslikavanja ravni.*

Translacija

Translacija $\tau_{\overrightarrow{q}}$ za vektor $\overrightarrow{q}\,(q_1, q_2)$ data je formulama

$$x' = x + q_1, \quad y' = y + q_2,$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{odnosno} \quad \tau_{\overrightarrow{q}} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kompozicija translacija je translacija, tj. **sve translacije čine (komutativnu) podgrupu grupe afinih transformacija.**

Rotacija oko koordinatnog početka

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Rotacija oko proizvoljne tačke

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \tau_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \tau_{\overrightarrow{OQ}}.$$

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Istezanje $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ u pravcu koordinatnih osa, sa centrom u tački Q

Ako je tačka Q koordinatni početak

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

za $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Ako je tačka Q proizvoljna, primenjujemo sličan trik kao sa rotacijom"

$$\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2} = \tau_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \tau_{\overrightarrow{QO}}.$$

Primetimo da je "homotetija" specijalan slučaj ovog preslikavanja za $\lambda_1 = \lambda_2$.

Preslikavanje dato formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

naziva se **smicanje** sa koeficientom λ u pravcu x ose.