Mešoviti proizvod je operacija $[] : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ koji trima vektorima $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}$ dodeljuje broj

$$[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] := (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{w}$$

Teorema *Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda* $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$ *jednaka je površina paralelepipeda odredjenog vektorima* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}$.

Dokaz: predavanja

Tri vektora su linearno nezavisna (nekomplanarna) ako i samo ako im je mešoviti proizvod različit od nule.

Algebarske osobine vektorskog i mešovitog proizvoda

Teorema *Za vektore* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}^3$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *važi:*

1) $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = - \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *(antisimetričnost),*

2) $(\alpha \overrightarrow{v} + \beta \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{w} = \alpha(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) + \beta(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w})$ *(linearnost),*

3) $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$,

4) $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$,

5) $[\alpha \overrightarrow{v} + \beta \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = \alpha[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] + \beta[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}]$ *(linearnost).*

Mešoviti prozivod u koordinatama

U ortonormiranoj bazi mešoviti proizvod se računa pomoću determinante:

$$[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Primer 1 *Da li su vektori* $\overrightarrow{a} = (1, 2, -7)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 3, 3)$, $\overrightarrow{c} = (-1, 8, -1)$ *linearno nezavisni.*

Zadatak 1 *Data je kocka* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *ivice* 1.

a) Odrediti ugao izmedju dijagonala strana kocke BC_1 *i* D_1B_1.

b) Odrediti zapreminu tetraedra BC_1B_1D.

Zadatak 2 *U odnosu na tačku* O *dati su vektori položaja* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ *tačaka* A *i* B $(A \neq B)$. *Izraziti vektor položaja tačke* C *takve da*

a) $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$;

b) tačka C *deli duž* AB *u odnosu* $p : q, \ \ p, q \in \mathbb{N}$.

Zadatak 3 *Neka je* ABC *trougao i tačka* T *takva da važi* $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

a) Dokazati da tačka T *ne zavisi od izbora tačke* O.

b) Dokažati da je tačka O *težište trougla, tj. presek težišnih duži i da ona tetežišne duži deli u odnosu* $2:1$.

Zadatak 4 *Dokazati da simetrala ugla u trouglu deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana.*

Zadatak 5 *Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).*