# Pitanja iz geometrije (I smer, druga godina)

Srdjan Vukmirović

decembar 2012.
napomena: bice dodati i zadaci za vežbu u ovom fajlu!

## 1 Teorijska pitanja

definicija vektora, kolinearni i komplanarni vektori, definicija sabiranja vektora, definicija mnozenja vektora brojem, dokaz da su svaka tri vektora ravni linearno zavisna, definicija koordinata vektora, definicija koordinata tačaka, definisati težište trougla i nacrtati sliku, navesti f-lu za težište $n$-tačaka $P_1, \dots P_n$,

definicija skalarnog proizvoda, računanje uglova i dužina pomoću skalarnog proizvoda

definicija vektorskog proizvoda, tablica vektorskog proizvoda u ON bazi, računanje vektorskog proizvoda, računanje površine trougla, definicija i odredjivanje orjentacije trougla, uslov da tačka $M$ pripada trouglu $ABC$, uslov kolinearnosti tri tačke

definicija mešovitog proizvoda, dokaz da je apsolutna vrednost mešovitog proizvoda jednaka zapremini paralelepipeda, računanje mešovitog proizvoda, uslov komplanarnosti tri vektora, uslov komplanarnosti četiri tačke, odredjivanje zapremina paralelopipeda (tetraedra)

napisati opšte f-le za transformacija koordinata tačaka i objasniti šta je šta, napisati matricu rotacije za ugao $\phi$ u ravni, dva oblika f-la za transformaciju koordinata ON repera i koji oblik šta predstavlja, napisati opšte f-le za afino preslikavanje ravni i objasniti šta je šta, matrično predstavljanje afinog preslikavanja ravni $3x3$ matricom, navesti osobine afinih preslikavanja, šta je slika trougla (kvadrata, paralelograma, kruga) pri afinom preslikavanju, da li afinim preslikavanje možemo preslikati kvadrat u paralelogram (trougao u četvorougao, trougao u proizvoljan trougao, paralelogram u trapez), napisati matrice rotacija oko koordinatnih osa u prostoru, navesti Ojlerovu teoremu o predstavljanju dekompoziciji ortogonalne matrice

jednačina prave ako znamo tačku i normalni vektor, napisati parametarsku jednačinu prave $p$, napisati parametarsku jednačinu duži $AB$, napisati dve f-le za rastojanje tačke od prave

definicija poligonske linije i poligona, definicija proste poligonske linije (nacrtati primer proste i ne-proste), uslov da tačka pripada unutrasnjosti (nacrtati primer), definisati triangulaciju poligona, dokaz da svaki prost poligon sa više od 3 temena ima unutrašnju dijagonalu, formulacija i dokaz teoreme da se svaki prost poligon $p$ moze triangulisati sa $n-2$ trougla ($n$ je broj temena poligona $p$), definicija konveksnog skupa (nacrtati primer konveksnog i nekonveksnog), šta je konveksni omotač nekog skupa (nacrtati primer), šta je konveksni omotač skupa od $n$ tačaka ravni (nacrtati primer), opisati algoritam reda $O(n^3)$ za odredjivanje konveksnog omotača,

napisati implicitnu i parametarsku jednačinu kruga poluprečnika $r$ sa centrom u $C(x_0, y_0)$, šta je konusni presek i šta on može biti, šta je ekscentricitet i koliki je ekscentricitet elipse (hiperbole, parabole), napisati kanonsku jednačinu i parametrizaciju elipse ( hiperbole), navesti i nacrtati optičku osobinu elipse (parabole, hiperbole), napisati opšti oblik krive drugog reda, napisati sve kanonske oblike krivih drugog reda (i imena tih krivih),

napisati definiciju Beizijerove krive stepena 2 i stepena 3, skicirati Bezijerove krive stepena 2 i 3 i njihove kontrolne tačke, objasniti rečima šta znači afina invarijantnost B. krive, nacrtati De Casteljau algoritam za krivu stepena 3 ili 4 i neko $t \in [0,1]$ (recimo t = 0.3, t=0.5 ...), kako se Bezijerova kriva stepena 2 (ili 3) deli na dve krive istog stepena u tački $t = 0.3$ (nacrtati i reći koji su poligoni), kako se povećava stepen Bezijerove krive bez promene oblika,

šta predstavlja jednačina $x^2 + y^2 = 1$ u prostoru, a šta jednačine $x^2 + y^2 = 1, z = 4$ , napisati formule afinog preslikavanja prostora i njegovo predstavaljanje matricom $4x4$, koji uslov zadovoljava matrica izometrije (kretanja), napisati matrice rotacija oko koordinatnih osa u prostoru, formulisati Ojlerovu teoremu od dekompoziciji izometrije prostora,

napisati jednačinu ravni u prostoru, šta je i kako se odredjuje koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni $\alpha$, napisati parametarsku (kanonsku) jednačinu prave u prostoru, napisati formulu za rastojanje tačke od ravni, navesti i nacrtati medjusobne položaje dve ravni u prostoru, navesti, nacrtati i napisati uslove u terminima $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{PQ}$ za medjusobne položaje dve prave $p$ i $q$ u prostoru, navesti teoremu o pramenu ravni, navesti i nacrtati medjusobne položaje prave i ravni u prostoru, sta su mimoilazne prave, navesti teoremu o normali mimoilaznih pravih (treba reći i šta je zajednička normala), formula za ugao izmedju dve prave (dve ravni, prave i ravni), kako se odredjuje presek prave i trougla, kako se odredjuje presek ravni i trougla i šta može biti,

definicija proste poliedarske površi, definicija ruba poliedarske površi, napisati tabelu povezanosti za kocku, definisati orjentabilnost poliedarske površi, dokazati da je kocka orjentabilna, skicirati glatku Mebijusovu traku i njen poliedarski model, napisati tabelu povezanosti Mebijusove trake, dokazati da Mebijusova traka nije orjentabilna, nacrtati torus i njegov poliedarski model, definicija Ojlerove karakteristike, skicirati glatke površi roda 0, 1 i 2, definisati Platonovo telo, nabrojati Platonova tela, dokazati da postoji tačno 5 Platonovih tela.

# 2 Vektori

**2.1 (*)** *Dokazati da je* $\vec{AB}=\vec{CD}$ *ako i samo ako se duži AD i BC polove.*

**2.2 (*)** *U odnosu na tačku O dati su vektori položaja* $\vec{OA}, \vec{OB}$ *tačaka A i B*

*$(A \neq B)$. Izraziti vektor položaja tačke $C$ takve da:*

a) $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$;

b) *tačka $C$ deli duž $AB$ u odnosu $p : q$, $p, q \in \mathbb{N}$*

**2.3 (*)** *Neka je $ABC$ trougao i $T$ tačka takva da važi $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.*

a) *Dokazati da tačka $T$ ne zavisi od izbora tačke $O$.*

b) *Dokazati da je tačka $T$ težište trougla, tj. presek težišnih duži i da ona težišne duži deli u odnosu $2 : 1$.*

**2.4 (*)** *Neka je $ABCD$ tetraedar i $T$ tačka takva da važi $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Težišnom duži tetraedra se naziva duž koja spaja teme tetraedra sa težištem napsramne pljosni. Dokazati da se težišne duži tetraedra seku u tački $T$ i da ih ona deli u odnosu $3 : 1$. Tačka $T$ se naziva* ***težište tetraedra****.*

**2.5** *Dat je paralelogram $ABCD$. Ako je tačka $F$ središte stranice $BC$, tačka $G$ središte stranice $CD$, a tačka $E$ presek duži $AF$ i $BG$ odrediti odnose $\frac{AE}{EF}$ i $\frac{BE}{EG}$.*

**2.6** *U ravni je dat trougao $ABC$. Neka tačka $D$ pripada stranici $AB$, a tačka $E$ stranici $BC$, tako da je $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ i $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$. Ako se duži $AE$ i $CD$ seku u tački $F$ odrediti u kom odnosu tačka $F$ deli duži $AE$ i $CD$.*

**2.7** *Dati su vektori $\vec{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ i $\vec{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ iz $\mathbb{V}^3$ svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a) $|\vec{v}|$; b) $\angle(\vec{v}, \vec{u})$.*

**2.8 (*)** *a) Ako je $A_1$ presek simetrale ugla $\angle BAC$ i ivice $BC$ trougla $ABC$, odrediti vektor $\overrightarrow{AA_1}$ preko vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ . b) Dokazati da simetrala ugla u trouglu $ABC$ deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana.*

**2.9 (*)** *Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).*

**2.10** *Odrediti površinu trougla $ABC$, ako je $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(-3, 4)$. Da li je trougao $ABC$ pozitivne orjentacije?*

**2.11** *a) Odrediti mešoviti proizvod $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$, ako su njihove koordinate u ortonormiranoj bazi $\vec{a} = (1, 2, -7)$, $\vec{b} = (-1, 3, 3)$, $\vec{c} = (-1, 8, -1)$.*
*b) Da li su ti vektori linearno nezavisni?*

**2.12** *a) Da li su tačke $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(7, 6)$ kolinearne?*
*b) Da li su tačke $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(7, -6, 5)$, $D(5, -8, 3)$ komplanarne?*

**2.13** *Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ivice 1. a) Odrediti ugao izmedju dijagonala strana kocke $BC_1$ i $D_1B_1$. b) Odrediti zapreminu tetraedra $BC_1B_1D$.*

**2.14** *Dat je pravilan šestougao* $ABCDEF$. *Ako je data baza* $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, $\vec{e_1} = \vec{AB}, \vec{e_2} = \vec{AF}$, *odrediti koordinate temena šestougla u reperu* $A\,\vec{e_1}\vec{e_2}$ .

**2.15** *Neka je* $OABC$ *paralelogram i* $e = (\vec{OA}, \vec{OC})$, $f = (\frac{1}{2}\,\vec{BO}, \vec{BC})$ *dve baze. Odrediti formule transformacija koordinata u reperima* $Oe$ *i* $Bf$, *kao i inverzne formule.*

**2.16** *Da li formule*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

*prestavljaju transformaciju koordinata izmedju dva ortonormirana repera? Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.*

# 3 Afina preslikavanja

**3.1** *Date su tačke* $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$; $A'(4,5)$, $B'(8,7)$, $C'(6,9)$, $D'(2,7)$. *a) Odrediti jednačine afinog preslikavanja koje kvadrat* $ABCD$ *preslikava u paralelogram* $A'B'C'D'$. *b) Izračunati površinu paralelograma, koristeći determinantu matrice dobijenog preslikavanja i površinu kvadrata.*

**3.2** *Dato je afino preslikavanje formulama*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

*Odrediti formule inverznog preslikavanja.*

**3.3** *Odrediti formule homotetije sa centrom u tački* $C(1,2)$ *i koeficientom* $3$. *U koju tačku se preslikava koordinatni početak pri ovoj homotetiji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku:* $x' = ...$, $y' = ...$*)*

**3.4** *Odrediti formule rotacije za ugao* $\phi = \frac{7\pi}{6}$ *oko tačke* $A(-2,3)$. *U koju tačku se preslikava tačka* $M(1,3)$ *pri ovoj rotaciji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku:* $x' = ...$, $y' = ...$*)*

**3.5** *Odrediti formule refleksije u odnosu na ravan* $\alpha_0 :\ 2x - y + 2z = 0$.

**3.6** *Odrediti formule rotacije za ugao* $\phi = \frac{\pi}{2}$ *oko prave* $p :\quad P(0,1,0), \vec{p}$ $(-1,2,2)$.

# 4 Analitička geometrija u ravni

**4.1** *Data je prava* $q : x = -t + 4, y = 2t - 7, t \in \mathbb{R}$. *a) Odrediti implicitni oblik prave* $q$. *b) Odrediti implicitni oblik prave* $r$ *koja sadrži tačku* $R(3,7)$ *i paralelna je* $q$.

**4.2** *Odrediti jednačinu normale $n$ iz tačke $A(1,7)$ na pravu $p$ ako je a)* $p: x = 2t+4, y = 3t-5, t \in \mathbb{R}$ *b)* $p: 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0$.

**4.3** *Neka je $A(2,3), B(-1,4)$. a) Odrediti parametarsku jednačinu prave $AB$. b) Ispitati da li tačka $C(14,-1)$ polupravoj $[AB)$. c) Ispitati da li tačka $D(1, \frac{10}{3})$ i u kom odnosu ona deli duž $AB$.*

**4.4** *Ispitati da li tačke $C(1,1)$ i $D(-7,11)$ pripadaju istoj poluravni odredjenoj pravom $AB$, $A(2,-2), B(1,3)$.*

**4.5** *Ako je $A(1,2), B(3,7)$, odrediti koordinate tačaka koje dele duž $AB$ na pet jednakih delova.*

**4.6** *Ispitati da li tačka $M(2,3)$ pripada trouglu $ABC$, ako je $A(1,7)$, $B(-3,3)$, $C(3,-3)$?*

**4.7** *Izračunati rastojanje tačke $M(1,-3)$ od prave a)* $2x-3y+1=0$, *b) prave $p$ čiji je vektor pravca $\vec{p} = (1,-2)$, a tačka $P(1,0)$.*

**4.8** *Odrediti centar i poluprečnik opisanog kruga u trougao $ABC$, ako je $A(1,2), B(4,3), C(6,0)$ kao i koordinate težišta trougla.*

**4.9** *Odrediti presek pravih $p$ i $q$ koje su zadate tačkom i vektorom pravca:*
*a)* $P(3,1), \vec{p} = (1,0), Q(2,3), \vec{q} = (1,1)$;
*b)* $P(3,1), \vec{p} = (1,0), Q(2,3), \vec{q} = (-2,0)$;
*c)* $P(3,1), \vec{p} = (1,-2), Q(2,3), \vec{q} = (-2,4)$.

**4.10** *Odrediti centar i poluprečnik kruga* $k: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

**4.11** *Odrediti presek kruga $k$ iz prethodnog zadatka i prave:*
*a)* $p: \vec{p} = (1,1), \quad P(2,-2)$
*b)* $q: x - y - 4 = 0$.

**4.12** *Odrediti presek krugova* $k: \ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ *i* $l: \ x = -1 + 4\cos t, \ y = -1 + 4\sin t, \ t \in [0, 2\pi)$.

# 5 Krive u ravni

**5.1 (*)** *Pokazati da za elipsu važi:* $d(M,F_1) + d(M,F_2) = 2a$.

**5.2 (*)** *Dokazati optičko svojstvo: a) elipse, b) parabole.*

**5.3** *Svesti na kanonski oblik translacijom: a)* $x^2 - 3y^2 - 4x - 18y - 23 = 0$ *b)* $3y^2 + 6y - x - 1 = 0$ *c)* $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y + 8 = 0$.

**5.4** *Odrediti Bezijerovu krivu čije su kontrolne tačke* $P_0(1,1)$, $P_1(2,2)$, $P_2(4,-1)$.

**5.5** *Odrediti Bezijerovu krivu čije su kontrolne tačke* $P_0(1,-1)$, $P_1(2,0)$, $P_2(4,-1)$, $P_2(0,0)$.

**5.6** *Date su tačke* $P_0 = (2,3), P_1 = (-1,4), P_2 = (3,0), P_3 = (1,-2)$.

a) *Odrediti Bezijerovu krivu* $\alpha_3(t), t \in [0,1]$ *čije su to kontrolne tačke.*

b) *Odrediti tangentne vektore u tačkama* $P_0$ *i* $P_3$.

c) *Da li je tangenta te krive u tački* $\alpha(\frac{1}{2})$ *paralelna pravoj* $P_0P_3$?

d) *Odrediti krivu dobijenu pomeranjem kontrolne tačke* $P_2$ *za vektor* $\overrightarrow{v} = (-7,-11)$. *Da li je tangenta te nove krive u tački* $\alpha'_3(\frac{1}{2})$ *paralelna pravoj* $P_0P_3$?

**5.7** *U ravni su date tačke* $P_0 = (2,1), P_1 = (6,13), P_2 = (14,-7)$ *i prave* $p: \ x = 2+3s, \ y = 12-2s, \ s \in \mathbb{R}, \ q: \ x = 7$ *i* $r: \ y = 5$.

a) *Napisati Bezijerovu krivu* $\alpha_2(t), t \in [0,1]$ *čiji je kontrolni poligon* $P_0P_1P_2$.

b) *Odrediti presek kontrolnog poligona sa pravama* $p, q, r$.

c) *Odrediti presek krive* $\alpha_2(t), t \in [0,1]$ *sa pravama* $p, q, r$. *Uporediti broj presečnih tačaka sa slučajem kontrolnog poligona (svojstvo najmanje varijacije).*

d) *Pokazati da je kriva* $\alpha_2(t), t \in [0,1]$ *deo parabole* $y^2 = 4x$ *(svojstvo afine invarijantnosti).*

**5.8** *Upotrebom de Casteljau algoritma odrediti tačku Bezijerove krive* $\alpha_4(t)$ *za* $t = \frac{2}{3}$, *ako su kontrolne tačke krive* $P_0(7,-8), P_1(-11,10), P_2(7,46), P_3(34,37), P_4(16,1)$.

**5.9** *Data je Bezijerova kriva kontrolnim tačkama* $P_0 = (2,-3), P_1 = (0,3), P_2 = (2,9), P_3 = (8,7)$.

a) *Podeliti krivu na dva dela praveći rez u tački* $\alpha_3(\frac{1}{2})$.

b) *Povećati stepen "leve" krive za 1.*

# 6 Konveksni omotač i triangulacija poligona

**6.1** *Odrediti konveksni omotač tačaka* $P_0 = (1,3), P_1 = (-2,0), P_2 = (-3,5), P_3 = (4,2), P_4 = (1,1), P_5 = (6,4), P_6 = (2,-3), P_7 = (5,5), P_8 = (5,-1)$.

**6.2** *U ravni su date tačke* $P_0 = (1,-3), P_1 = (2,-2), P_2 = (-1,2), P_3 = (4,-1), P_4 = (0,3)$. *Ispitati da li je poligon* $P_0P_1P_2P_3P_4$ *prost. Ako nije, sortirati tačke* $P_0, \ldots P_4$ *tako da poligon bude prost.*

**6.3** *Od datih tačaka u ravni formirati prost poligon, a zatim ga triangulisati.*

a) $P_0 = (0,0), P_1 = (5,-1), P_2 = (3,2), P_3 = (6,4), P_4 = (-1,3)$

b) $P_0 = (-1,3), P_1 = (2,1), P_2 = (0,0), P_3 = (4,-1), P_4 = (5,3), P_5 = (3,4)$.

# 7 Prava i ravan u prostoru

**7.1** *Ravni* $x - y + 3z - 2 = 0$ *odrediti parametarski jednačinu.*

**7.2** *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke* $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, -1)$ *i* $C(0, 0, 1)$.

**7.3** *Odrediti ortonormirani koordinatni sistem* $(x', y', z')$ *u odnosu na ravan* $\alpha : x - y - 2 = 0$ *(tj. koordinatni sistem* $O'x'y'z'$ *u kom ravan* $\alpha$ *ima jednačinu* $z' = 0$*) i napisati vezu tih koordinata sa koordinatama* $(x, y, z)$.

**7.4** *Pravu* $p : x = t + 4, y = -2t + 1, z = 3t - 2, t \in \mathbb{R}$ *zapisati kao presek dve ravni.*

**7.5** *Odrediti jednačinu ravni* $\alpha$ *koja sadrži pravu* $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ *i koja je normalna na ravan* $\beta : y = 0$.

**7.6** *Pravu* $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$ *zapisati parametarski.*

**7.7** *Odrediti rastojanje tačke* $M(1, 0, 12)$ *od prave* $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

**7.8** *Odrediti rastojanje tačke* $M(1, 0, 12)$ *od ravni* $\alpha : x - y - 4z = 0$.

**7.9** *Odrediti jednačinu ravni* $\alpha$ *koja sadrži pravu* $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ *i čije je rastojanje od tačke* $M(1, 1, 1)$ *jednako* $\frac{5}{\sqrt{14}}$. *(Jedno rešenje:* $3x - y + 2z + 1 = 0$*)*

**7.10** *Odrediti medjusobni položaj pravih (i presečnu tačku ako postoji) pravih:*

$$a)\quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : 2x = y, 3x = z$$

$$b)\quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$

$$b)\quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$$

***7.11*** *Odrediti zajedničku normalu i rastojanje izmedju mimoilaznih pravih* $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ *i* $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

***7.12*** *Odrediti rastojanje izmedju mimoilaznih pravih*

$$p : \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0} \qquad q : \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5.}$$

***7.13*** *Izračunati (koristeći digitron za* arccos*) ugao ravni* $\alpha : x + 2y - 3z - 1 = 0$ *i* $\beta : 2x - 3y + 4z + 2 = 0$.

***7.14*** *Izračunati (koristeći digitron za* arccos*) ugao izmedju prave* $p : x + 2y - 3z - 1 = 0, x - z + 2 = 0$ *i ravni* $\alpha : x - 4y + 2z + 2 = 0$.

***7.15*** *Odrediti jednačinu normale iz tačke* $A(2,3,-1)$ *na ravan* $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$.

***7.16*** *Odrediti tačku* $Q$ *koja je simetrična tački* $P(3,-2,-4)$ *u odnosu na ravan* $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ *kao i projekciju* $P'$ *tačke* $P$ *na ravan* $\alpha$.

***7.17*** *Odrediti centralnu projekciju tačke* $P(1,2,3)$ *na ravan* $z = -1$, *ako je centar projektovanja tačka* $O(0,0,0)$.

***7.18*** *Odrediti* $\lambda$ *tako da se prave* $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ *i* $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ *seku. Koje su koordinate presečne tačke?*

***7.19*** *Ispitati da li prava* $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-4}$ *seče trougao* $ABC$, *ako je* $A(2,4,6)$, $B(-4,2,0)$, $C(6,4,-2)$. *U slučaju da seče odrediti koordinate presečne tačke.*

***7.20*** *Odrediti presek ravni* $\alpha : x - 2y + 2z + 5 = 0$ *i trougla* $ABC$, *ako je* $A(0,0,0)$, $B(2,2,2)$, $C(2,1,5)$.

***7.21*** *Odrediti presek ravni* $\alpha : x - y + 2z - 3 = 0$ *i trougla* $ABC$, *ako je* $A(1,-2,0)$, $B(-1,2,3)$, $C(2,1,3)$.

# 8 Poliedarske površi

***8.1*** *a) Iz tabele povezanosti odrediti skup ivica. b) Nacrtati sliku. c) Proveriti da li ta tabela povezanosti zadaje apstraktnu poliedarsku površ. d) U slučaju potvrdnog odgovora pod c) proveriti da li je ta poliedarska površ povezana. e) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.*

*za sledeće tabele povezanosti: i)* $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, $p_0 = \langle 0,1,2 \rangle$, $p_1 = \langle 0,2,4,5 \rangle$, $p_2 = \langle 3,2,0 \rangle$, $p_3 = \langle 1,0,3 \rangle$.

*ii)* $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $p_0 = \langle 0,1,7,4 \rangle$, $p_1 = \langle 1,2,6,7 \rangle$, $p_2 = \langle 2,3,5,6 \rangle$, $p_3 = \langle 3,0,4,5 \rangle$, $p_4 = \langle 8,9,10 \rangle$.

***8.2*** *a) Nacrtati poliedarski model Mebijusove trake i napisati mu tabelu povezanosti. b) Dokazati da je Mebijusova traka neorjentabilna.*

***8.3*** *Izvršiti uskladjivanje orjentacija pljosni kocke* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, *ako je izabrana orjentacija pljosni* $p_0 = \langle A,B,C,D \rangle$.

***8.4*** *Data je poliedarska površ* $p_0 = \langle 0,1,4,3 \rangle$, $p_1 = \langle 1,2,5,4 \rangle$, $p_2 = \langle 2,0,3,5 \rangle$, $p_3 = \langle 6,8,5,3 \rangle$, $p_4 = \langle 6,3,4,7 \rangle$, $p_5 = \langle 4,5,8,7 \rangle$, $p_6 = \langle 8,7,1,2 \rangle$, $p_7 = \langle 0,1,7,6 \rangle$, $p_8 = \langle 0,6,8,2 \rangle$.

*a) Dokazati da je ona poliedar, tj. da nema rub.*

*b) Izračunati njenu Ojlerovu karakterisku i broj rupa.*

***8.5*** *Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake.*

# 9 Zadaci za vežbu

**9.1** *Dat je kvadrat $ABCD$, čije je središte $S$. Ako je data baza $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, $\vec{e_1} = \vec{AS}$, $\vec{e_2} = \vec{AD}$, odrediti koordinate tačaka $A, B, C, D, S$ u reperu $Ae$.*

**9.2** *Odrediti zapreminu tetraedra čija su temena $A(1,0,0)$, $B(3,4,6)$, $C(0,1,0)$, $D(1,1,3)$. (Rešenje: $V = \frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 2$.)*

**9.3** *Odrediti bar tri tačke koje pripadaju unutrašnjosti trougla sa temenima $A(1,4)$, $B(6,5)$, $C(4,6)$.*

**9.4** *Odrediti formule homotetije sa centrom $C(3,-2)$ i koeficientom $-5$. U koju tačku se preslikava tačka $X(3,-2)$ pri ovoj homotetiji. (Rešenje: Pošto je $X = C$, tačka $X$ se slika u sebe, tj. $X'(3,-2)$. Proveriti.)*

**9.5** *Odrediti podnožje normale iz tačke $A(1,3)$ na pravoj $p : 2x - 2y - 4 = 0$. (Rešenje: tačka $(3,1)$.)*

**9.6** *Odrediti presek pravih $AB$ i $CD$, gde je $A(12,3), B(12,5), C(5,7), D(-2,1)$. (Rešenje: tačka $(12,13)$.)*

**9.7** *Dat je trougao $ABC$, $A(3,5), B(5,3), C(9,3)$. Odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla, kao i jednačinu opisanog kruga. (Rešenje: $r = 4, C(7,7)$.)*

**9.8** *Odrediti težište $T$, ortocentar $H$ i centre opisanog $O$ i upisanog kruga u $\triangle ABC$, $A(-1,4), B(2,3), C(0,1)$.*

**9.9** *Odrediti presek prave $p : x+y-8 = 0$ i kruga $k : x^2+y^2-6x-6y+14 = 0$. (Rešenje: tačke $(3,5)$ i $(5,3)$.)*

**9.10** *Date su tačke $A_1(1,7)$, $A_2(-3,3)$, $A_3(3,-3)$. a) Odrediti Bezijerovu krivu stepena 2 čije su to kontrolne tačke. b) Odrediti tačku $M$ koja se dobija za $t = \frac{1}{2}$.*

**9.11** *Svesti krive na kanonski oblik izometrijskom transformacijom i odrediti o kojoj se krivoj radi: a) $y^2 - 6y - 6x - 3 = 0$, b) $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$. (Rešenje: parabola, tačka)*

**9.12** *Odrediti tačku $Q$ koja je simetrična tački $P(-1,-2,1)$ u odnosu na pravu $l : \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$ kao i projekciju $P'$ tačke $P$ na pravu $l$.*

**9.13** *Odrediti jedančinu ravni koja sadrži pravu $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ i normalna je na ravan $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.*

**9.14** *Data je poliedarska površ $p_0 = \langle 0,1,2 \rangle$, $p_1 = \langle 5,0,2 \rangle$, $p_2 = \langle 0,3,4 \rangle$, $p_3 = \langle 1,2,3 \rangle$, $p_4 = \langle 1,3,4 \rangle$, $p_5 = \langle 0,4,5 \rangle$.*

*a) Odrediti rub te poliedarske površi. Koliko on ima komponenata?*

*b) Uraditi uskladjivanje orjentacija pljosni. Da li je površ orjentabilna?*