Geometrija (I smer)
deo 1: Vektori

Srdjan Vukmirović

Matematički fakultet, Beograd

10. oktobar 2012.

Vektori i linearne operacije sa vektorima

Definicija

Vektor *je klasa ekvivalencije usmerenih duži. Kažemo da su dve usmerene duži ekvivalentne, tj. predstavljaju isti vektor, ako imaju isti pravac, smer i intenzitet.*

Vektori i linearne operacije sa vektorima

Definicija

Vektor *je klasa ekvivalencije usmerenih duži. Kažemo da su dve usmerene duži ekvivalentne, tj. predstavljaju isti vektor, ako imaju isti pravac, smer i intenzitet.*

Za svaku tačku A i vektor $\overrightarrow{v}$ postoji jedinstvena usmerena duž AB takva da je $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}$. Usmerenu duž AB je *predstavnik* vektora $\overrightarrow{AB}$.

Definicija

Vektor *je klasa ekvivalencije usmerenih duži. Kažemo da su dve usmerene duži ekvivalentne, tj. predstavljaju isti vektor, ako imaju isti pravac, smer i intenzitet.*

Za svaku tačku A i vektor $\vec{v}$ postoji jedinstvena usmerena duž AB takva da je $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Usmerenu duž AB je *predstavnik* vektora $\overrightarrow{AB}$.

kolinearni vektori, komplanarni vektori, nula vektor

Vektori i linearne operacije sa vektorima

Definicija

Vektor *je klasa ekvivalencije usmerenih duži. Kažemo da su dve usmerene duži ekvivalentne, tj. predstavljaju isti vektor, ako imaju isti pravac, smer i intenzitet.*

Za svaku tačku A i vektor $\vec{v}$ postoji jedinstvena usmerena duž AB takva da je $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Usmerenu duž AB je *predstavnik* vektora $\overrightarrow{AB}$.

kolinearni vektori, komplanarni vektori, nula vektor

Sa $\mathbb{V}^2$ označavamo skup svih vektora ravni, a sa $\mathbb{V}^3$ skup svih vektora prostora. Ako nam nije važno da li radimo u ravni ili prostoru, skup vektora označavamo sa $\mathbb{V}$.

Definicija (Sabiranje vektora)

Neka je $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BC}$. *Zbir vektora* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$ *je vektor*

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} := \overrightarrow{AC}.$$

Definicija (Sabiranje vektora)

Neka je $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{u} = \vec{BC}$. *Zbir vektora* $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$ *je vektor*

$$\vec{v} + \vec{u} := \vec{AC}.$$

Definicija (Množenje vektora skalarom (brojem))

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ *broj i* $\vec{v} \in \mathbb{V}$ *vektor. Proizvod* $\alpha \vec{v}$ *broja i vektora je vektor* $\vec{u}$ *koji ima:*

(P) isti pravac kao vektor $\vec{v}$;

(I) intenzitet $\| \vec{u} \| = |\alpha| \| \vec{v} \|$;

(S) smer vektora $\vec{u}$ *je isti kao smer vektora* $\vec{v}$ *ako* $\alpha > 0$, *a suprotan ako* $\alpha < 0$.

Razlika dva vektora

$$\vec{v} - \vec{u} := \vec{v} + (-1)\,\vec{u}$$

je zbir vektora $\vec{v}$ i vektora $-1\,\vec{u}$, suprotnog vektoru $\vec{u}$.

Razlika dva vektora

$$\vec{v} - \vec{u} := \vec{v} + (-1)\,\vec{u}$$

je zbir vektora $\vec{v}$ i vektora $-1\,\vec{u}$, suprotnog vektoru $\vec{u}$.

Ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ brojevi, a $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ vektori, tada se izraz

$$\alpha_1\,\vec{v_1} + \cdots + \alpha_n\,\vec{v_n}$$

naziva **linearna kombinacija vektora**.

Razlika dva vektora

$$\vec{v} - \vec{u} := \vec{v} + (-1)\,\vec{u}$$

je zbir vektora $\vec{v}$ i vektora $-1\,\vec{u}$, suprotnog vektoru $\vec{u}$.

Ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ brojevi, a $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ vektori, tada se izraz

$$\alpha_1\,\vec{v_1} + \cdots + \alpha_n\,\vec{v_n}$$

naziva **linearna kombinacija vektora**.

Primer

Vektori $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{u} = \vec{CD}$ su zadati svojim predstavnicima (na papiru). Odrediti predstavnika vektora

$$\vec{v} - 2\,\vec{u}\,.$$

Skup $\mathbb{V}$ svih vektora (ravni ili prostora) je *vektorski prostor* u smislu Linearne algebre, tj. važi

Teorema

Ako su $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ *vektori, a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *realni brojevi tada važi:*

(S1)	$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$,	*(M1)*	$\alpha(\vec{v} + \vec{u}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{u}$,
(S2)	$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$,	*(M2)*	$\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$,
(S3)	$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$,	*(M3)*	$(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$,
(S4)	$\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$;	*(M4)*	$1\vec{v} = \vec{v}$.

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija

Vektori $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$ *su* **linearno nezavisni** *ako iz relacije*

$$\alpha_1 \vec{a_1} + \cdots + \alpha_n \vec{a_n} = \vec{0}$$

sledi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. *U suprotnom, kada je bar jedan od brojeva* α_i *različit od nule vektori se nazivaju* **linearno zavisnim**.

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija

Vektori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *su* **linearno nezavisni** *ako iz relacije*

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

sledi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. *U suprotnom, kada je bar jedan od brojeva* α_i *različit od nule vektori se nazivaju* **linearno zavisnim**.

Primer

Vektori odredjeni stranicama trougla su linearno zavisni.

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija

Vektori $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$ *su* **linearno nezavisni** *ako iz relacije*

$$\alpha_1 \vec{a_1} + \cdots + \alpha_n \vec{a_n} = \vec{0}$$

sledi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. *U suprotnom, kada je bar jedan od brojeva* α_i *različit od nule vektori se nazivaju* **linearno zavisnim**.

Primer

Vektori odredjeni stranicama trougla su linearno zavisni.

Teorema

Nenula vektori $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *su linearno zavisni ako i samo ako su kolinearni.*

Teorema

U vektorskom prostoru $\mathbb{V}^2$ *postoje dva linearno nezavisna vektora, a svaka tri vektora su linearno zavisna.*

Teorema

U vektorskom prostoru $\mathbb{V}^2$ *postoje dva linearno nezavisna vektora, a svaka tri vektora su linearno zavisna.*

Teorema

U vektorskom prostoru $\mathbb{V}^3$ *postoje tri linearno nezavisna vektora, a svaka četiri vektora su linearno zavisna.*

Koordinate vektora i tačaka

Koordinate vektora i tačaka

baza i dimenzija vektorskog prostora

Koordinate vektora i tačaka

baza i dimenzija vektorskog prostora

Neka je $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ neka baza vektora ravni. Ako za neki vektor $\overrightarrow{v}$ važi

$$\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{e_1} + v_2 \overrightarrow{e_2}$$

tada kažemo da su (v_1, v_2) **koordinate vektora** $\overrightarrow{v}$ **u bazi** e i pišemo

$$[\overrightarrow{v}]_e = (v_1, v_2).$$

Slično je u prostoru.

Koordinate vektora i tačaka

baza i dimenzija vektorskog prostora

Neka je $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ neka baza vektora ravni. Ako za neki vektor $\vec{v}$ važi

$$\vec{v} = v_1 \vec{e_1} + v_2 \vec{e_2}$$

tada kažemo da su (v_1, v_2) **koordinate vektora** $\vec{v}$ **u bazi** e i pišemo

$$[\vec{v}]_e = (v_1, v_2).$$

Slično je u prostoru.

Primer

Dat je paralelogram $OABC$. Tačke P i Q su središta ivica AB i BC, redom. Odrediti koordinate vektora $\vec{PQ}$ u bazi $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, ako je $\vec{e_1} = \vec{OA}$, $\vec{e_2} = \vec{OC}$.

Neka je e baza vektorskog prostora i O fiksirana tačka. Tada se Oe naziva **koordinatni sistem ili reper**.

Neka je e baza vektorskog prostora i O fiksirana tačka. Tada se Oe naziva **koordinatni sistem ili reper**.

Definicija

Koordinate tačke M **reperu** *Oe definišemo kao koordinate vektora $\vec{OM}$ u bazi* e*, tj.*

$$[M]_{Oe} := [\vec{OM}]_e.$$

Neka je e baza vektorskog prostora i O fiksirana tačka. Tada se Oe naziva **koordinatni sistem ili reper**.

Definicija

Koordinate tačke M ***reperu*** *Oe definišemo kao koordinate vektora $\overrightarrow{OM}$ u bazi e, tj.*

$$[M]_{Oe} := [\overrightarrow{OM}]_e.$$

Primer

Neka je $OABC$ paralelogram, i neka je $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ baza. Odrediti koordinate temena paralelograma u reperu Oe.

Neka je e baza vektorskog prostora i O fiksirana tačka. Tada se Oe naziva **koordinatni sistem ili reper**.

Definicija

Koordinate tačke M **reperu** *Oe definišemo kao koordinate vektora $\overrightarrow{OM}$ u bazi e, tj.*

$$[M]_{Oe} := [\overrightarrow{OM}]_e.$$

Primer

Neka je $OABC$ paralelogram, i neka je $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ baza. Odrediti koordinate temena paralelograma u reperu Oe.

Koordinate vektora se dobijaju oduzimanjem koordinata tačaka:

$$[\overrightarrow{MN}]_e = [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e = [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e = [N]_{Oe} - [M]_{Oe}.$$

Skalarni proizvod

Skalarni proizvod

Definicija

Skalarni proizvod vektora *je preslikavanje koje dvama vektorima dodeljuje broj*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} := \| \vec{v} \| \| \vec{u} \| \cos \phi$$

gde je $\phi \in [0, \pi)$ *(neorjentisani) ugao izmedju vektora* $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$.

Skalarni proizvod

Definicija

Skalarni proizvod vektora *je preslikavanje koje dvama vektorima dodeljuje broj*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} := \| \vec{v} \| \| \vec{u} \| \cos \phi$$

gde je $\phi \in [0, \pi)$ *(neorjentisani) ugao izmedju vektora* $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$ *.*

Znak skalarnog proizvoda nam govori da li je ugao medju vektorima oštar, prav ili tup.

Skalarni proizvod

Definicija

Skalarni proizvod vektora *je preslikavanje koje dvama vektorima dodeljuje broj*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} := \| \vec{v} \| \| \vec{u} \| \cos \phi$$

gde je $\phi \in [0, \pi)$ *(neorjentisani) ugao izmedju vektora* $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$ *.*

Znak skalarnog proizvoda nam govori da li je ugao medju vektorima oštar, prav ili tup.

Pomoću skalarnog proizvoda vektora mogu se računati dužine i uglovi

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}, \qquad \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\| \vec{v} \| \| \vec{u} \|}.$$

Ortonormirana baza je ona baza čiji su svi vektori medjusobno ortogonalni i jedinični, tj. Dakle, baza $e = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ ortonormirana ako važi $\vec{e_i} \cdot \vec{e_i} = 1$ za iste vektore i $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = 0$ za različite vektore.

Ortonormirana baza je ona baza čiji su svi vektori medjusobno ortogonalni i jedinični, tj. Dakle, baza $e = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ ortonormirana ako važi $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_i} = 1$ za iste vektore i $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = 0$ za različite vektore.

Odatle sledi da je skalarni proizvod vektora $v = v_1 \overrightarrow{e_1} + v_2 \overrightarrow{e_2}$ i $u = u_1 \overrightarrow{e_1} + u_2 \overrightarrow{e_2}$ datih u ortonormiranoj bazi jednak

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2.$$

U prostoru važi slična formula $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$.

Ortonormirana baza je ona baza čiji su svi vektori medjusobno ortogonalni i jedinični, tj. Dakle, baza $e = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ ortonormirana ako važi $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_i} = 1$ za iste vektore i $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = 0$ za različite vektore.

Odatle sledi da je skalarni proizvod vektora $v = v_1 \overrightarrow{e_1} + v_2 \overrightarrow{e_2}$ i $u = u_1 \overrightarrow{e_1} + u_2 \overrightarrow{e_2}$ datih u ortonormiranoj bazi jednak

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2.$$

U prostoru važi slična formula $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$.

Zadatak

Dati su vektori $\overrightarrow{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ *i* $\overrightarrow{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ *iz* $\mathbb{V}^3$ *svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a)* $\| \overrightarrow{v} \|$; *b)* $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.

Orjentacija u ravni i prostoru

Orjentacija u ravni i prostoru

Orjentaciju uvodimo intuitivno. Šta je pozitivna, a šta negativna orjentacija je stvar dogovora.

Orjentaciju uvodimo intuitivno. Šta je pozitivna, a šta negativna orjentacija je stvar dogovora.

Trougao ABC u ravni je pozitivne orjentacije ako je smer obilaska njegovih temena suprotan smeru kretanja kazaljke na satu.

Orjentacija u ravni i prostoru

Orjentaciju uvodimo intuitivno. Šta je pozitivna, a šta negativna orjentacija je stvar dogovora.

Trougao ABC u ravni je pozitivne orjentacije ako je smer obilaska njegovih temena suprotan smeru kretanja kazaljke na satu.

Baza ravni $(\vec{OA}, \vec{OB})$ je pozitivne orjentacije, ako je trougao OAB pozitivne orjentacije.

Orjentacija u ravni i prostoru

Orjentaciju uvodimo intuitivno. Šta je pozitivna, a šta negativna orjentacija je stvar dogovora.

Trougao ABC u ravni je pozitivne orjentacije ako je smer obilaska njegovih temena suprotan smeru kretanja kazaljke na satu.

Baza ravni $(\vec{OA}, \vec{OB})$ je pozitivne orjentacije, ako je trougao OAB pozitivne orjentacije.

Orjentacija baze prostora $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ se odredjuje "pravilom desne ruke".

Vektorski proizvod

Definicija

Vektorski proizvod je operacija koja dvama vektorima prostora $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$ *dodeljuje vektor* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ *kome su intenzitet, pravac i smer odredjeni sa:*

(I) $|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}| \sin \phi$, *gde je* ϕ *ugao izmedju* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$.

(P) *vektor* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ *je normalan na svaki od vektora* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$.

(S) *smer vektora* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ *je takav da je baza* $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$ *pozitivne orjentacije.*

Vektorski proizvod

Definicija

Vektorski proizvod je operacija koja dvama vektorima prostora $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$ *dodeljuje vektor* $\vec{v} \times \vec{u}$ *kome su intenzitet, pravac i smer odredjeni sa:*

(I) $|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}||\vec{u}|\sin\phi$, *gde je* ϕ *ugao izmedju* $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$.

(P) *vektor* $\vec{v} \times \vec{u}$ *je normalan na svaki od vektora* $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$.

(S) *smer vektora* $\vec{v} \times \vec{u}$ *je takav da je baza* $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u})$ *pozitivne orjentacije.*

Primetimo da je na osnovu (I) intenzitet vektorskog proizvoda jednak površini paralelograma razapetog vektorima koje množimo.

Vektorski proizvod

Definicija

Vektorski proizvod je operacija koja dvama vektorima prostora $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$ *dodeljuje vektor* $\vec{v} \times \vec{u}$ *kome su intenzitet, pravac i smer odredjeni sa:*

(I) $|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}||\vec{u}| \sin\phi$, *gde je* ϕ *ugao izmedju* $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$.

(P) *vektor* $\vec{v} \times \vec{u}$ *je normalan na svaki od vektora* $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$.

(S) *smer vektora* $\vec{v} \times \vec{u}$ *je takav da je baza* $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u})$ *pozitivne orjentacije.*

Primetimo da je na osnovu (I) intenzitet vektorskog proizvoda jednak površini paralelograma razapetog vektorima koje množimo.

Dakle, **vektori** $\vec{v}$ **i** $\vec{u}$ **prostora su linearno nezavisni ako i samo ako je** $\vec{v} \times \vec{u} \neq \vec{0}$.

Teorema (osobine vektorskog proizvoda)

Za vektore $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ *prostora i brojeve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *važi:*

1) $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$ *(antisimetričnost),*

2) $(\alpha \vec{v} + \beta \vec{u}) \times \vec{w} = \alpha(\vec{v} \times \vec{w}) + \beta(\vec{u} \times \vec{w})$ *(linearnost),*

Primetimo da vektorski proizvod **nije komutativan**, već antikomutativan. Vektorski proizvod **nije ni asocijativan**.

Teorema (osobine vektorskog proizvoda)

Za vektore $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ *prostora i brojeve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *važi:*

1) $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$ *(antisimetričnost),*

2) $(\alpha \vec{v} + \beta \vec{u}) \times \vec{w} = \alpha(\vec{v} \times \vec{w}) + \beta(\vec{u} \times \vec{w})$ *(linearnost),*

Primetimo da vektorski proizvod **nije komutativan**, već antikomutativan. Vektorski proizvod **nije ni asocijativan**. To sledi iz formule za dvostruki vektorski proizvod:

$$v \times (u \times w) = (v \cdot w)u - (v \cdot u)w.$$

Za ortonormiranu bazu $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ pozitivne orjentacije važe sledeći proizvodi

$\times$	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{e_3}$	$-\overrightarrow{e_2}$
$\overrightarrow{e_2}$	$-\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_2}$	$-\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{0}$

Za ortonormiranu bazu $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ pozitivne orjentacije važe sledeći proizvodi

$\times$	$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$	$\vec{e_3}$
$\vec{e_1}$	$\vec{0}$	$\vec{e_3}$	$-\vec{e_2}$
$\vec{e_2}$	$-\vec{e_3}$	$\vec{0}$	$\vec{e_1}$
$\vec{e_3}$	$\vec{e_2}$	$-\vec{e_1}$	$\vec{0}$

Neka je $\vec{v} = v_1 \vec{e_1} + v_2 \vec{e_2} + v_3 \vec{e_3}$, $\vec{u} = u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2} + u_3 \vec{e_3}$

$$\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{u} &= (v_2 u_3 - v_3 u_2) \vec{e_1} + (v_3 u_1 - v_1 u_3) \vec{e_2} + (v_1 u_2 - v_2 u_1) \vec{e_3} = \\
&= \begin{vmatrix} \vec{e1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Neka su $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i $C(c_1, c_2)$ tačke ravni. Ako stavimo da je treća koordinata tih tačaka jednaka 0, dobijamo

Neka su $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i $C(c_1, c_2)$ tačke ravni. Ako stavimo da je treća koordinata tih tačaka jednaka 0, dobijamo

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC} \vec{e_3} .$$

Neka su $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i $C(c_1, c_2)$ tačke ravni. Ako stavimo da je treća koordinata tih tačaka jednaka 0, dobijamo

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC} \vec{e_3} .$$

Lako se proverava da važi:

- **površina trougla** ABC je $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|D_{ABC}|$.
- **tačke** A, B, C **ravni su kolinearne** ako i samo ako $D_{ABC} = 0$.
- **trougao** ABC **je pozitivne orjentacije** ako $D_{ABC} > 0$.

Neka su $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i $C(c_1, c_2)$ tačke ravni. Ako stavimo da je treća koordinata tih tačaka jednaka 0, dobijamo

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC} \, \vec{e_3} \, .$$

Lako se proverava da važi:

- **površina trougla** ABC je $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|D_{ABC}|$.
- **tačke** A, B, C **ravni su kolinearne** ako i samo ako $D_{ABC} = 0$.
- **trougao** ABC **je pozitivne orjentacije** ako $D_{ABC} > 0$.

Primer

Odrediti površinu trougla ABC, ako je $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(-3, 4)$. Da li je trougao ABC pozitivne orjentacije?

Teorema

Tačka M pripada trouglu ABC ako i samo ako su D_{ABM}, D_{BCM} i D_{CAM} istog znaka.

Teorema

Tačka M pripada trouglu ABC ako i samo ako su D_{ABM}, D_{BCM} i D_{CAM} istog znaka.

Primer

Da li tačka $M(2,3)$ pripada trouglu ABC, ako je $A(1,7)$, $B(-3,3)$, $C(3,-3)$?

Mešoviti proizvod

Definicija

Mešoviti proizvod *je operacija koja trima vekorima prostora dodeljuje broj*

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] := (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}\ .$$

Mešoviti proizvod

Definicija

Mešoviti proizvod *je operacija koja trima vekorima prostora dodeljuje broj*

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] := (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}\ .$$

Teorema

Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$ *jednaka je površina paralelepipeda odredjenog vektorima* $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$.

Mešoviti proizvod

Definicija

Mešoviti proizvod *je operacija koja trima vekorima prostora dodeljuje broj*

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] := (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} \,.$$

Teorema

Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$ *jednaka je površina paralelepipeda odredjenog vektorima* $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$.

Tri vektora su linearno nezavisna (nekomplanarna) ako i samo ako im je mešoviti proizvod različit od nule.

Teorema (osobine mešovitog proizvoda)

Za vektore $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}, \vec{t} \in \mathbb{V}^3$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *važi:*

1) $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$,
2) $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$,
3) $[\alpha \vec{v} + \beta \vec{u}, \vec{w}, \vec{t}] = \alpha[\vec{v}, \vec{w}, \vec{t}] + \beta[\vec{u}, \vec{w}, \vec{t}]$ *(linearnost).*

Teorema (osobine mešovitog proizvoda)

Za vektore $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}, \vec{t} \in \mathbb{V}^3$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *važi:*

1) $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$,
2) $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$,
3) $[\alpha \vec{v} + \beta \vec{u}, \vec{w}, \vec{t}] = \alpha[\vec{v}, \vec{w}, \vec{t}] + \beta[\vec{u}, \vec{w}, \vec{t}]$ *(linearnost).*

U ortonormiranoj bazi pozitivne orjentacije, mešoviti proizvod se računa pomoću determinante:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Teorema (osobine mešovitog proizvoda)

Za vektore $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}, \vec{t} \in \mathbb{V}^3$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *važi:*

1) $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$,
2) $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$,
3) $[\alpha \vec{v} + \beta \vec{u}, \vec{w}, \vec{t}] = \alpha[\vec{v}, \vec{w}, \vec{t}] + \beta[\vec{u}, \vec{w}, \vec{t}]$ *(linearnost).*

U ortonormiranoj bazi pozitivne orjentacije, mešoviti proizvod se računa pomoću determinante:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Primer

Odrediti zapreminu tetraedra ABCD ako je $A(1,2,3)$, $B(0,1,-1)$, $C(-1,2,3)$, $D(1,0,0)$.