

Zadaci iz Geometrije (I smer, druga godina)

Srdjan Vukmirović

decembar 2010.

1 Vektori. Koordinate. Vektorska algebra

1.1 (*) U odnosu na tačku O dati su vektori položaja \vec{OA}, \vec{OB} tačaka A i B ($A \neq B$). Izraziti vektor položaja tačke C takve da

a) $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$;

b) tačka C deli duž AB u odnosu $p : q, p, q \in \mathbb{N}$.

1.2 (*) Neka je ABC trougao i tačka T takva da važi $\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$.

a) Dokazati da tačka T ne zavisi od izbora tačke O .

b) Dokazati da je tačka O težište trougla, tj. presek težišnih duži i da ona tetežišne duži deli u odnosu $2 : 1$.

1.3 Dati su vektori $\vec{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ i $\vec{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ iz \mathbb{V}^3 svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a) $|\vec{v}|$; b) $\angle(\vec{v}, \vec{u})$.

1.4 (*) a) Dokazati da simetrala ugla u trouglu ABC deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana. b) Ako je A_1 presek simetrale ugla $\angle BAC$ i ivice BC , odrediti vektor $\vec{AA_1}$ preko vektora \vec{AB} i \vec{AC} .

1.5 (*) Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).

1.6 Odrediti površinu trougla određenog ABC , ako je $A(1, 2), B(2, 3), C(-3, 4)$. Da li je trougao ABC pozitivne orijentacije?

1.7 a) Odrediti mešoviti proizvod $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$, ako su njihove koordinate u ortonormiranoj bazi $\vec{a} = (1, 2, -7), \vec{b} = (-1, 3, 3), \vec{c} = (-1, 8, -1)$.

b) Da li su ti vektori linearno nezavisni.

1.8 Data je kocka $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ivice 1. a) Odrediti ugao između dijagonala strana kocke BC_1 i $D_1 B_1$. b) Odrediti zapreminu tetraedra $BC_1 B_1 D_1$.

1.9 Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$. Ako je data baza $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{e}_1 = \vec{AB}, \vec{e}_2 = \vec{AF}$, odrediti koordinate temena šestougla u reperu $A \vec{e}_1 \vec{e}_2$.

1.10 Neka je $OABC$ paralelogram i $e = (\vec{OA}, \vec{OC})$, $f = (\frac{1}{2}\vec{BO}, \vec{BC})$ dve baze. Odrediti formule transformacija koordinata u reperima Oe i Bf , kao i inverzne formule.

1.11 Da li formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

prestavljaju transformaciju koordinata između dva ortonormirana repera? Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.

2 Afina preslikavanja ravni

2.1 Date su tačke $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$; $A'(4, 5)$, $B'(8, 7)$, $C'(6, 9)$, $D'(2, 7)$. a) Odrediti jednačine afinog preslikavanja koje kvadrat $ABCD$ preslikava u paralelogram $A'B'C'D'$. b) Izračunati površinu paralelograma, koristeći determinantu matrice dobijenog preslikavanja i površinu kvadrata.

2.2 Dato je afino preslikavanje formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Odrediti formule inverznog preslikavanja.

2.3 Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $C(1, 2)$ i koeficijentom 3. U koju tačku se preslikava koordinatni početak pri ovoj homotetiji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku: $x' = \dots$, $y' = \dots$)

2.4 Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{7\pi}{6}$ oko tačke $A(-2, 3)$. U koju tačku se preslikava tačka $M(1, 3)$ pri ovoj rotaciji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku: $x' = \dots$, $y' = \dots$)

3 Analitička geometrija u ravni

3.1 Data je prava $q: x = -t + 4, y = 2t - 7, t \in \mathbb{R}$. a) Odrediti implicitni oblik prave q . b) Odrediti implicitni oblik prave r koja sadrži tačku $R(3, 7)$ i paralelna je q .

3.2 Odrediti jednačinu normale n iz tačke $A(1, 7)$ na pravu p ako je a) $p: x = 2t + 4, y = 3t - 5, t \in \mathbb{R}$ b) $p: 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0$.

3.3 Neka je $A(2, 3), B(-1, 4)$. a) Odrediti parametarsku jednačinu prave AB . b) Ispitati da li tačka $C(14, -1)$ polupravoj $[AB)$. c) Ispitati da li tačka $D(1, \frac{10}{3})$ i u kom odnosu ona deli duž AB .

3.4 Ispitati da li tačke $C(1, 1)$ i $D(-7, 11)$ pripadaju istoj poluravni određenoj pravom AB , $A(2, -2)$, $B(1, 3)$.

3.5 Ako je $A(1, 2)$, $B(3, 7)$, odrediti koordinate tačaka koje dele duž AB na pet jednakih delova.

3.6 Ispitati da li tačka $M(2, 3)$ pripada trouglu ABC , ako je $A(1, 7)$, $B(-3, 3)$, $C(3, -3)$?

3.7 Izračunati rastojanje tačke $M(1, -3)$ od prave a) $2x - 3y + 1 = 0$, b) prave p čiji je vektor pravca $\vec{p} = (1, -2)$, a tačka $P(1, 0)$.

3.8 Odrediti centar i poluprečnik opisanog kruga u trougao ABC , ako je $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(6, 0)$ kao i koordinate težišta trougla.

3.9 Odrediti presek pravih p i q koje su zadate tačkom i vektorom pravca:

- a) $P(3, 1)$, $\vec{p} = (1, 0)$, $Q(2, 3)$, $\vec{q} = (1, 1)$;
- b) $P(3, 1)$, $\vec{p} = (1, 0)$, $Q(2, 3)$, $\vec{q} = (-2, 0)$;
- c) $P(3, 1)$, $\vec{p} = (1, -2)$, $Q(2, 3)$, $\vec{q} = (-2, 4)$.

3.10 Odrediti centar i poluprečnik kruga $k : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

3.11 Odrediti presek kruga k iz prethodnog zadatka i prave:

- a) $p : \vec{p} = (1, 1)$, $P(2, -2)$
- b) $q : x - y - 4 = 0$.

4 Krive u ravni

4.1 (*) Svesti krivu drugog reda $4x^2 + 9y^2 - 2x + 2y - 12xy - 19 = 0$ na kanonski oblik izometrijskom transformacijom. O kojoj krivoj se radi?

4.2 Svesti na kanonski oblik rotacijom: a) $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 7 = 0$ b) $x^2 + y^2 - xy + 1 = 0$

4.3 Svesti na kanonski oblik translacijom: a) $x^2 - 3y^2 - 4x - 18y - 23 = 0$ b) $3y^2 + 6y - x - 1 = 0$ c) $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y + 8 = 0$.

4.4 a) Odrediti Bezierovu krivu čije su kontrolne tačke $P_0(1, 1)$, $P_1(2, 2)$, $P_2(4, -1)$.
b) Odrediti tačku M za $t = \frac{1}{3}$ i tangentni vektor krive u toj tački.

5 Prava i ravan u prostoru

5.1 Ravni $x - y - 2 = 0$ odrediti parametarski jednačinu.

5.2 Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, -1)$ i $C(0, 0, 1)$.

5.3 Odrediti ortonormirani koordinatni sistem (x', y', z') u odnosu na ravan $\alpha : x - y - 2 = 0$ (tj. koordinatni sistem $O'x'y'z'$ u kom ravan α ima jednačinu $z' = 0$) i napisati vezu tih koordinata sa koordinatama (x, y, z) .

5.4 Pravu $p : x = t + 4, y = -2t + 1, z = 3t - 2, t \in \mathbb{R}$ zapisati kao presek dve ravni.

5.5 Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ i koja je normalna na ravan $\beta : y = 0$.

5.6 Pravu $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$ zapisati parametarski.

5.7 Odrediti rastojanje tačke $M(1, 0, 12)$ od prave $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

5.8 Odrediti rastojanje tačke $M(1, 0, 12)$ od ravni $\alpha : x - y - 4z = 0$.

5.9 Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : x = 4t - 2, y = t + 2, z = -2t - 2$, i čije je rastojanje od tačke $M(3, 2, 1)$ jednako $\sqrt{14}$.

5.10 Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ i čije je rastojanje od tačke $M(1, 1, 1)$ jednako $\frac{5}{\sqrt{14}}$. (Jedno rešenje: $3x - y + 2z + 1 = 0$)

5.11 Odrediti međusobni položaj pravih (i presečnu tačku ako postoji) pravih:

$$a) \quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \quad q : 2x = y, 3x = z$$

$$b) \quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \quad q : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$

$$b) \quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \quad q : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$$

5.12 Odrediti zajedničku normalu i rastojanje izmedju mimoilaznih pravih $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ i $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

5.13 Odrediti rastojanje izmedju mimoilaznih pravih

$$p : \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0} \quad q : \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5}$$

5.14 Izračunati (koristeći digitron za arccos) ugao ravni $\alpha : x + 2y - 3z - 1 = 0$ i $\beta : 2x - 3y + 4z + 2 = 0$.

5.15 Izračunati (koristeći digitron za arccos) ugao izmedju prave $p : x + 2y - 3z - 1 = 0, x - z + 2 = 0$ i ravni $\alpha : x - 4y + 2z + 2 = 0$.

5.16 Odrediti jednačinu normale iz tačke $A(2, 3, -1)$ na ravan $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$.

5.17 Odrediti tačku Q koja je simetrična tački $P(3, -2, -4)$ u odnosu na ravan $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ kao i projekciju P' tačke P na ravan α .

5.18 Odrediti λ tako da se prave $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ i $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ seku. Koje su koordinate presečne tačke?

5.19 Ispitati da li prava $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-4}$ seče trougao ABC , ako je $A(2, 4, 6)$, $B(-4, 2, 0)$, $C(6, 4, -2)$. U slučaju da seče odrediti koordinate presečne tačke.

5.20 Odrediti presek trougla ABC i ravni $\alpha : x - y + 2z - 3 = 0$, ako je $A(1, -2, 0)$, $B(-1, 2, 3)$ i $C(2, 1, 3)$.

6 Poliedarske površi

6.1 a) Iz tabele povezanosti odrediti skup ivica. b) Nacrtati sliku. c) Proveriti da li ta tabela povezanosti zadaje apstraktnu poliedarsku površ. d) U slučaju potvrdnog odgovora pod c) proveriti da li je ta poliedarska površ povezana. e) Odrediti rub te površi i broj komponenta ruba.

za sledeće tabele povezanosti: i) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, $p_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $p_1 = \langle 0, 2, 4, 5 \rangle$, $p_2 = \langle 3, 2, 0 \rangle$, $p_3 = \langle 1, 0, 3 \rangle$.

ii) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $p_0 = \langle 0, 1, 7, 4 \rangle$, $p_1 = \langle 1, 2, 6, 7 \rangle$, $p_2 = \langle 2, 3, 5, 6 \rangle$, $p_3 = \langle 3, 0, 4, 5 \rangle$, $p_4 = \langle 8, 9, 10 \rangle$.

6.2 a) Nacrtati poliedarski model Mebijusove trake i napisati mu tabelu povezanosti. b) Dokazati da je Mebijusova traka neorjentabilna.

6.3 Izvršiti uskladjivanje orijentacija pljosni kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ako je izabrana orijentacija pljosni $p_0 = \langle A, B, C, D \rangle$.

6.4 Data je poliedarska površ $p_0 = \langle \rangle$, $p_0 = \langle 0, 1, 4, 3 \rangle$, $p_1 = \langle 1, 2, 5, 4 \rangle$, $p_2 = \langle 2, 0, 3, 5 \rangle$, $p_3 = \langle 6, 8, 5, 3 \rangle$, $p_4 = \langle 6, 3, 4, 7 \rangle$, $p_5 = \langle 4, 5, 8, 7 \rangle$, $p_6 = \langle 8, 7, 1, 2 \rangle$, $p_7 = \langle 0, 1, 7, 6 \rangle$, $p_8 = \langle 0, 6, 8, 2 \rangle$.

a) Dokazati da je ona poliedar, tj. da nema rub.

b) Izračunati njenu Ojlerovu karakteristiku i broj rupa.

6.5 Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake.

7 Zadaci za vežbu

7.1 Dat je kvadrat $ABCD$, čije je središte S . Ako je data baza $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{e}_1 = \vec{AS}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$, odrediti koordinate tačaka A, B, C, D, S u reperu Ae .

7.2 Odrediti zapreminu tetraedra čija su temena $A(1, 0, 0)$, $B(3, 4, 6)$, $C(0, 1, 0)$, $D(1, 1, 3)$. (Rešenje: $V = \frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 2$.)

7.3 Odrediti bar tri tačke koje pripadaju unutrašnjosti trougla sa temenima $A(1, 4)$, $B(6, 5)$, $C(4, 6)$.

7.4 Odrediti formule homotetije sa centrom $C(3, -2)$ i koeficijentom -5 . U koju tačku se preslikava tačka $X(3, -2)$ pri ovoj homotetiji. (Rešenje: Pošto je $X = C$, tačka X se slika u sebe, tj. $X'(3, -2)$. Proveriti.)

7.5 Odrediti podnožje normale iz tačke $A(1, 3)$ na pravoj $p : 2x - 2y - 4 = 0$. (Rešenje: tačka $(3, 1)$.)

7.6 Odrediti presek pravih AB i CD , gde je $A(12, 3)$, $B(12, 5)$, $C(5, 7)$, $D(-2, 1)$. (Rešenje: tačka $(12, 13)$.)

7.7 Dat je trougao ABC , $A(3, 5)$, $B(5, 3)$, $C(9, 3)$. Odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla, kao i jednačinu opisanog kruga. (Rešenje: $r = 4$, $C(7, 7)$.)

7.8 Odrediti presek prave $p : x + y - 8 = 0$ i kruga $k : x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$. (Rešenje: tačke $(3, 5)$ i $(5, 3)$.)

7.9 Date su tačke $A_1(1, 7)$, $A_2(-3, 3)$, $A_3(3, -3)$. a) Odrediti Bezijerovu krivu stepena 2 čije su to kontrolne tačke. b) Odrediti tačku M koja se dobija za $t = \frac{1}{2}$ kao i jednačinu tangente u toj tački.

7.10 Svesti krive na kanonski oblik izometrijskom transformacijom i odrediti o kojoj se krivoj radi: a) $y^2 - 6y - 6x - 3 = 0$, b) $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$, c) $-5x^2 + 6\sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$. (Rešenje: parabola, tačka, hiperbola.)

7.11 Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku $M(-1, 0, 3)$ i normalna je na pravu $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

7.12 Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ i normalna je na ravan $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.

7.13 Odrediti presek trougla ABC i ravni $\alpha : x - 2y + 2z + 5 = 0$, ako je $A(0, 0, 0)$, $B(2, 2, 2)$ i $C(2, 1, 5)$.

7.14 Data je poliedarska površ $p_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $p_1 = \langle 5, 0, 2 \rangle$, $p_2 = \langle 0, 3, 4 \rangle$, $p_3 = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $p_4 = \langle 1, 3, 4 \rangle$, $p_5 = \langle 0, 4, 5 \rangle$.

a) Odrediti rub te poliedarske površi. Koliko on ima komponentata?

b) Uraditi uskladjivanje orijentacija pljosni. Da li je površ orijentabilna?