Zadatak 1 *Ispitati da li su tačke* $A(1,-3)$, $B(0,4)$, $C(-1,11)$ *kolinearne.*

Zadatak 2 *a) Ispitati da li tačka* $M(2,3)$ *pripada trouglu* ABC*, ako je* $A(1,7)$, $B(-3,3)$, $C(3,-3)$*?*

b) Da li je trougao ABC *pozitivne ili negativne orjentacije?*

Mešoviti proizvod

Definicija 1 **Mešoviti proizvod** *je operacija koja trima vekorima prostora dodeljuje broj*

$$[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] := (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{w}\ .$$

Teorema *Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda* $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$ *jednaka je površina paralelepipeda odredjenog vektorima* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}$ *.*

Dokaz: predavanja

Tri vektora su linearno nezavisna (nekomplanarna) ako i samo ako im je mešoviti proizvod različit od nule.

Teorema (osobine mešovitog proizvoda) *Za vektore* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t} \in \mathbb{V}^3$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *važi:*

1) $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$,

2) $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$,

3) $[\alpha \overrightarrow{v} + \beta \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}] = \alpha[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}] + \beta[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}]$ *(linearnost).*

Primetimo da su simetrije 1) i 2) iste kao i simetrije vrsta (tj. kolona) determinante, što se razjašnjava sledećom formulom.

Mešoviti prozivod u koordinatama

U ortonormiranoj bazi pozitivne orjentacije, mešoviti proizvod se računa pomoću determinante:

$$[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Zadatak 3 *Da li su vektori* $\overrightarrow{a} = (1, 2, -7)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 3, 3)$, $\overrightarrow{c} = (-1, 8, -1)$ *linearno nezavisni.*

Zadatak 4 *Data je kocka* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *ivice* 1.

a) Odrediti ugao izmedju dijagonala strana kocke BC_1 *i* D_1B_1.

b) Odrediti zapreminu tetraedra BC_1B_1D.

Transformacije koordinata tačaka

Pretpostavimo da su data dva koordinatna sistema Oe i $O'f$. Neka su bazni vektori vezani relacijama

$$\overrightarrow{f_1} = c_{11}\,\overrightarrow{e_1} + c_{21}\,\overrightarrow{e_2}, \quad \overrightarrow{f_2} = c_{12}\,\overrightarrow{e_1} + c_{22}\,\overrightarrow{e_2}$$

Matrica $C = (c_{ij})$ je tzv. **matrica prelaska** sa baze e na bazu f. Neka su koordinate novog koord. početka su $[O']_{Oe} = (b_1, b_2)$.

Za koordinate proizvoljne tačke M u tim sistemima važi:

$$(x, y) = [M]_{Oe} = [\overrightarrow{OM}]_e, \quad \text{odnosno} \quad \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2},$$

$$(x', y') = [M]_{O'f} = [\overrightarrow{O'M}]_f, \quad \text{odnosno} \quad \overrightarrow{O'M} = x'\,\overrightarrow{f_1} + y'\,\overrightarrow{f_2}\,.$$

Odatle imamo

$$
\begin{aligned}
x \overrightarrow{e_1} + y \overrightarrow{e_2} &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = b_1 \overrightarrow{e_1} + b_2 \overrightarrow{e_2} + x' \overrightarrow{f_1} + y' \overrightarrow{f_2} = \\
&= b_1 \overrightarrow{e_1} + b_2 \overrightarrow{e_2} + x'(c_{11} \overrightarrow{e_1} + c_{21} \overrightarrow{e_2}) + y'(c_{12} \overrightarrow{e_1} + c_{22} \overrightarrow{e_2}) = \\
&= (c_{11}x' + c_{12}y' + b_1) \overrightarrow{e_1} + (c_{21}x' + c_{22}y' + b_2) \overrightarrow{e_2}
\end{aligned}
$$

Zato važe formule:

$$
\begin{aligned}
x &= c_{11}x' + c_{12}y' + b_1, \\
y &= c_{21}x' + c_{22}y' + b_2.
\end{aligned}
$$

Te formule predstavljaju **transformaciju koordinata tačaka ravni**, tj. vezu koordinata (x, y) i (x', y') iste tačke M u dva različita koordinatna sistema. Matrično ih zapisujemo ovako:

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.
$$

Zadatak 5 *Neka je* $OABC$ *paralelogram i* $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, $f = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CA})$ *dve baze. Odrediti formule transformacija koordinata u reperima* Oe *i* Bf, *kao i inverzne formule.*

Transformacije koordinata ortonormiranih repera

Formule transformacija koordinata ravni iz ortonormiranog repera Oe u ortonormiran reper $O'f$ iste orjentacije su:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ovo je kompozicija **rotacije** za ugao ϕ i **translacije** za vektor (q_1, q_2).

Ukoliko su reperi različitih orjentacija formule su:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ovo je kompozicija **refleksije** koja gradi ugao $\frac{\phi}{2}$ sa x-osom i **translacije** za vektor (q_1, q_2).

Zadatak 6 *Da li formule*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

prestavljaju transformaciju koordinata izmedju dva ortonormirana repera? Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.

Afina preslikavanja

Definicija 2 **Afino preslikavanje ravni** *je preslikavanje koje tački $M(x, y)$ preslikava u tačku $M'(x', y')$ po pravilu*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

uz uslov $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Algebarski gledano, formule afinih preslikavanja su istog oblika kao formule transformacija koordinata.

Kolone matrice su slike baznih vektora pri tom preslikavanju, a (q_1, q_2) je slika kooridnatnog početka.

Slično se definiše i **afino preslikavanje prostora.**

Teorema *(Osobine afinih preslikavanja ravni)* **Bijekcije su***;*

Preslikavaju **prave** *na prave, a* **krive drugog reda** *na krive drugog reda;*

Čuvaju razmeru *tri tačke;*

Čuvaju paralelnost*. Dakle, slika paralelograma je paralelogram.*

Afinim preslikavanjem **možemo preslikati proizvoljan trougao na proizvoljan drugi trougao.**

Odnos zapremina (površina *neke figure i njene slike pri afinom preslikavanju je* $V(\mathcal{F}') : V(\mathcal{F}) = |\det A|$.

Primer 1 *Date su tačke* $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$; $A'(4,5)$, $B'(8,7)$, $C'(6,9)$, $D'(2,7)$.

1) Odrediti jednačine afinog preslikavanja koje kvadrat $ABCD$ *preslikava u paralelogram* $A'B'C'D'$.

2) Odrediti jednačinu slike kruga upisanog u kvadrat.

3) Kolika je površina slike kruga.

Predstavljanje afinih preslikavanja matricama

Afino preslikavanje

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

možemo predstaviti matricom:

$$A_q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Teorema Proizvod matrica (6) odgovara kompoziciji afinih preslikavanja. *Drugim rečima, podgrupa svih matrica oblika (6) je izomorfna podgrupi afinih preslikavanja ravni.*

Translacija

Translacija $\tau_{\overrightarrow{q}}$ za vektor $\overrightarrow{q}\,(q_1, q_2)$ data je formulama

$$x' = x + q_1, \quad y' = y + q_2,$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{odnosno} \quad \tau_{\overrightarrow{q}} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kompozicija translacija je translacija, tj. **sve translacije čine (komutativnu) podgrupu grupe afinih transformacija.**

Rotacija oko koordinatnog početka

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Rotacija oko proizvoljne tačke

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \tau_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \tau_{\overrightarrow{OQ}}.$$

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Istezanje $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ u pravcu koordinatnih osa, sa centrom u tački Q

Ako je tačka Q koordinatni početak

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

za $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Ako je tačka Q proizvoljna, primenjujemo sličan trik kao sa rotacijom''

$$\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2} = \tau_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \tau_{\overrightarrow{QO}}.$$

Primetimo da je ''homotetija'' specijalan slučaj ovog preslikavanja za $\lambda_1 = \lambda_2$.

Smicanje

Preslikavanje dato formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

naziva se **smicanje** sa koeficientom λ u pravcu x ose.

Smicanje preslikava kvadrat u paralelogram iste visine i osnovice, pa dakle i iste površine ($\det A = 1$).