Geometrija (I smer)
deo 4: Analitička geometrija u prostoru

Srdjan Vukmirović

Matematički fakultet, Beograd

27. novembar 2012.

Ravan

Ravan

Ravan α je odredjena normalnim vektorom $\vec{n_\alpha} = (a, b, c)$ i tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$.

Ravan

Ravan α je odredjena normalnim vektorom $\vec{n_\alpha} = (a, b, c)$ i tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Jednačina te ravni je:

$$\begin{aligned} 0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = \\ &= ax + by + cy + d \end{aligned}$$

Ravan

Ravan α je odredjena normalnim vektorom $\overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$ i tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Jednačina te ravni je:

$$\begin{aligned} 0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = \\ &= ax + by + cy + d \end{aligned}$$

Poluravan je odredjena nejednačinom $ax + by + cy + d > 0$, odnosno $ax + by + cy + d < 0$.

Ravan

Ravan α je odredjena normalnim vektorom $\vec{n_\alpha} = (a, b, c)$ i tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Jednačina te ravni je:

$$\begin{aligned} 0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = \\ &= ax + by + cy + d \end{aligned}$$

Poluravan je odredjena nejednačinom $ax + by + cy + d > 0$, odnosno $ax + by + cy + d < 0$.

Primer

a) Odrediti ravan β *koja sadrži tačku* $B(1, 3, -2)$ *i paralelna ravni* $\alpha : x - 3y + 4z - 6 = 0$.
b) Da li se $A(1, 1, 1)$ *i* $C(-1, -1, 3)$ *nalaze sa iste strane ravni* β.

Ravan

Ravan α je odredjena normalnim vektorom $\vec{n_\alpha} = (a, b, c)$ i tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Jednačina te ravni je:

$$\begin{aligned} 0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = \\ &= ax + by + cy + d \end{aligned}$$

Poluravan je odredjena nejednačinom $ax + by + cy + d > 0$, odnosno $ax + by + cy + d < 0$.

Primer

a) Odrediti ravan β *koja sadrži tačku* $B(1, 3, -2)$ *i paralelna ravni* $\alpha : x - 3y + 4z - 6 = 0$.
b) Da li se $A(1, 1, 1)$ *i* $C(-1, -1, 3)$ *nalaze sa iste strane ravni* β.

Primer

Odrediti ravan α *koja sadrži tačke* $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, -1)$, $C(0, 0, 1)$.

Drugi način da opišemo ravan α jeste da joj zadamo jednu tačku $A(x_0, y_0, z_0)$ i dva vektora $\overrightarrow{u}\ (u_x, u_y, u_z)$ i $\overrightarrow{v}\ (v_x, v_y, v_z)$ paralelna ravni α.

Drugi način da opišemo ravan α jeste da joj zadamo jednu tačku $A(x_0, y_0, z_0)$ i dva vektora $\vec{u}\ (u_x, u_y, u_z)$ i $\vec{v}\ (v_x, v_y, v_z)$ paralelna ravni α.
Tada se svaka tačka M ravni α može zapisati u obliku

$$M(t, s) = M = A + t\ \vec{u} + s\ \vec{v}, \tag{1}$$

za neke brojeve $t, s \in \mathbb{R}$.

Drugi način da opišemo ravan α jeste da joj zadamo jednu tačku $A(x_0, y_0, z_0)$ i dva vektora $\vec{u}\ (u_x, u_y, u_z)$ i $\vec{v}\ (v_x, v_y, v_z)$ paralelna ravni α.
Tada se svaka tačka M ravni α može zapisati u obliku

$$M(t,s) = M = A + t\ \vec{u} + s\ \vec{v}, \tag{1}$$

za neke brojeve $t, s \in \mathbb{R}$. Vektorska jednačina (1) se u koordinatama zapisuje kao

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tu_x + sv_x, \\ y &= y_0 + tu_y + sv_y, \\ z &= z_0 + tu_z + sv_z, \end{aligned} \tag{2}$$

za $t, s \in \mathbb{R}$ što obično zovemo **parametarska jednačina ravni**.

Primer

Data je ravan α parametarski:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 3 & + & 2t & + & s, \\ y & = & -7 & - & t, & & \\ z & = & & & t & - & 6s, \end{array}$$

$t, s \in \mathbb{R}$. *Odrediti jednačinu te ravni.*

Primer

Data je ravan α parametarski:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 3 & + & 2t & + & s, \\ y & = & -7 & - & t, & & \\ z & = & & & t & - & 6s, \end{array}$$

$t, s \in \mathbb{R}$. *Odrediti jednačinu te ravni.*

Primer

Odrediti parametarski oblik ravni $\alpha : x - y + 6z - 1 = 0$.

Koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni

Koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni

Za rešavanje mnogih problema korisno je preći na novi ortonormirani koordinatni sistem $Qx'y'z'$ u kom data ravan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ ima jednačinu $z' = 0$.

Koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni

Za rešavanje mnogih problema korisno je preći na novi ortonormirani koordinatni sistem $Qx'y'z'$ u kom data ravan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ ima jednačinu $z' = 0$.
Takav sistem je zadat sa (nije jedinstven):

Koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni

Za rešavanje mnogih problema korisno je preći na novi ortonormirani koordinatni sistem $Qx'y'z'$ u kom data ravan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ ima jednačinu $z' = 0$.
Takav sistem je zadat sa (nije jedinstven):

koordinatni početak: neka tačka $Q \in \alpha$,

Koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni

Za rešavanje mnogih problema korisno je preći na novi ortonormirani koordinatni sistem $Qx'y'z'$ u kom data ravan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ ima jednačinu $z' = 0$.
Takav sistem je zadat sa (nije jedinstven):

koordinatni početak: neka tačka $Q \in \alpha$,

vektor z'-ose: $\overrightarrow{f_3} = \frac{\overrightarrow{n_\alpha}}{|\overrightarrow{n_\alpha}|}$,

Koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni

Za rešavanje mnogih problema korisno je preći na novi ortonormirani koordinatni sistem $Qx'y'z'$ u kom data ravan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ ima jednačinu $z' = 0$.

Takav sistem je zadat sa (nije jedinstven):

koordinatni početak: neka tačka $Q \in \alpha$,

vektor z'-ose: $\overrightarrow{f_3} = \frac{\overrightarrow{n_\alpha}}{|\overrightarrow{n_\alpha}|}$,

vektor x'-ose: bilo koji jedinični $\overrightarrow{f_1} \perp \overrightarrow{f_3}$

Koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni

Za rešavanje mnogih problema korisno je preći na novi ortonormirani koordinatni sistem $Qx'y'z'$ u kom data ravan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ ima jednačinu $z' = 0$.
Takav sistem je zadat sa (nije jedinstven):

koordinatni početak: neka tačka $Q \in \alpha$,

vektor z'-ose: $\vec{f_3} = \frac{\vec{n_\alpha}}{|\vec{n_\alpha}|}$,

vektor x'-ose: bilo koji jedinični $\vec{f_1} \perp \vec{f_3}$

vektor y'-ose: $\vec{f_2} = \vec{f_3} \times \vec{f_1}$

Koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni

Za rešavanje mnogih problema korisno je preći na novi ortonormirani koordinatni sistem $Qx'y'z'$ u kom data ravan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ ima jednačinu $z' = 0$.
Takav sistem je zadat sa (nije jedinstven):

koordinatni početak: neka tačka $Q \in \alpha$,

vektor z'-ose: $\vec{f_3} = \frac{\vec{n_\alpha}}{|\vec{n_\alpha}|}$,

vektor x'-ose: bilo koji jedinični $\vec{f_1} \perp \vec{f_3}$

vektor y'-ose: $\vec{f_2} = \vec{f_3} \times \vec{f_1}$

Primer

Data je ravan $\alpha : x + 2y + 2z - 1 = 0$ *i u njoj tačka* $C(3, 1, -2)$. *Odrediti parametrizaciju kruga* k *poluprečnika* $r = 2$ *sa centrom* C *koji pripada ravni* α.

Prava

Prava u prostoru je zadata tačkom $P(x_0, y_0, z_0)$ i nenula vektorom pravca $\vec{p}\,(p_x, p_y, p_z)$.

Prava

Prava u prostoru je zadata tačkom $P(x_0, y_0, z_0)$ i nenula vektorom pravca $\overrightarrow{p}\,(p_x, p_y, p_z)$. Tada je svaka tačka M prave p oblika

$$M(t) = M = P + t\,\overrightarrow{p},$$

za neko $t \in \mathbb{R}$.

Prava

Prava u prostoru je zadata tačkom $P(x_0, y_0, z_0)$ i nenula vektorom pravca $\vec{p}\,(p_x, p_y, p_z)$. Tada je svaka tačka M prave p oblika

$$M(t) = M = P + t\,\vec{p},$$

za neko $t \in \mathbb{R}$. U koordinatama dobijamo

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \\ z &= z_0 + tp_z, \end{aligned} \tag{3}$$

$t \in \mathbb{R}$, tzv. **parametarsku jednačinu prave**.

Prava

Prava u prostoru je zadata tačkom $P(x_0, y_0, z_0)$ i nenula vektorom pravca $\overrightarrow{p}\,(p_x, p_y, p_z)$. Tada je svaka tačka M prave p oblika

$$M(t) = M = P + t\,\overrightarrow{p},$$

za neko $t \in \mathbb{R}$. U koordinatama dobijamo

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \\ z &= z_0 + tp_z, \end{aligned} \tag{3}$$

$t \in \mathbb{R}$, tzv. **parametarsku jednačinu prave**. Kada jednačine (3) rešimo po t dobijamo **kanonski oblik:**

$$\frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y} = \frac{z - z_0}{p_z} = t.$$

Prava kao presek dve ravni

Posmatrajmo sistem dve linearne jednačine

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad ax + by + cz + d = 0, \\ \beta: &\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

koje predstavljaju ravni α i β.

Prava kao presek dve ravni

Posmatrajmo sistem dve linearne jednačine

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad ax + by + cz + d = 0, \\ \beta: &\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

koje predstavljaju ravni α i β.
Ako su $\vec{n_\alpha}$ i $\vec{n_\beta}$ kolinearni, prave su paralelne ili se poklapaju.

Prava kao presek dve ravni

Posmatrajmo sistem dve linearne jednačine

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad ax + by + cz + d = 0, \\ \beta: &\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

koje predstavljaju ravni α i β.
Ako su $\overrightarrow{n_\alpha}$ i $\overrightarrow{n_\beta}$ kolinearni, prave su paralelne ili se poklapaju.
U suprotnom, ako su $\overrightarrow{n_\alpha}$ i $\overrightarrow{n_\beta}$ nezavisni, one se seku po jedinstvenoj pravoj $p = \alpha \cap \beta$.

Prava kao presek dve ravni

Posmatrajmo sistem dve linearne jednačine

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad ax + by + cz + d = 0, \\ \beta: &\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

koje predstavljaju ravni α i β.
Ako su $\vec{n_\alpha}$ i $\vec{n_\beta}$ kolinearni, prave su paralelne ili se poklapaju.
U suprotnom, ako su $\vec{n_\alpha}$ i $\vec{n_\beta}$ nezavisni, one se seku po jedinstvenoj pravoj $p = \alpha \cap \beta$.

Primer

Pravu p koja je presek ravni $\alpha : 3x - y + 2z + 1 = 0$ i $\beta : x - z = 0$ predstaviti u kanonskom obliku.

Prava kao presek dve ravni

Posmatrajmo sistem dve linearne jednačine

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad ax + by + cz + d = 0, \\ \beta: &\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

koje predstavljaju ravni α i β.
Ako su $\overrightarrow{n_\alpha}$ i $\overrightarrow{n_\beta}$ kolinearni, prave su paralelne ili se poklapaju.
U suprotnom, ako su $\overrightarrow{n_\alpha}$ i $\overrightarrow{n_\beta}$ nezavisni, one se seku po jedinstvenoj pravoj $p = \alpha \cap \beta$.

Primer

Pravu p koja je presek ravni $\alpha : 3x - y + 2z + 1 = 0$ i $\beta : x - z = 0$ predstaviti u kanonskom obliku.

Primer

Pravu $p : x = t + 4, y = -2t + 1, z = 3t - 2, t \in \mathbb{R}$ zapisati kao presek dve ravni.

Teorema

rastojanje tačke M od prave p, odredjene tačkom $P \in p$ i vektorom pravca $\vec{p}$, je dato formulom

$$d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}.$$

Teorema

rastojanje tačke M od prave p, odredjene tačkom $P \in p$ i vektorom pravca $\overrightarrow{p}$, je dato formulom

$$d = \frac{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{p}|}.$$

Teorema

Rastojanje tačke $M(x_0, y_0, z_0)$ od ravni $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ dato je formulom

$$d(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Teorema

rastojanje tačke M od prave p, odredjene tačkom $P \in p$ i vektorom pravca $\overrightarrow{p}$, je dato formulom

$$d = \frac{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{p}|}.$$

Teorema

Rastojanje tačke $M(x_0, y_0, z_0)$ od ravni $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ dato je formulom

$$d(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Primer

Odrediti rastojanje tačke $M(1, 0, 12)$ od prave $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

Pramen ravni

Pramen ravni

Teorema

Skup svih ravni koje sadrže pravu p koja je data jednačinom (4), osim ravni β je dat jednačinom

$$\gamma_\lambda : ax + by + cz + d + \lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0,$$

za $\lambda \in \mathbb{R}$.

Primer

Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : x = 4t - 2, y = t + 2, z = -2t - 2$, i čije je rastojanje od tačke $M(3, 2, 1)$ jednako $\sqrt{14}$.

Medjusobni položaji dve ravni

Medjusobni položaji dve ravni

- Ravni α i β **se poklapaju** ako su jednačine proporcionalne.

Medjusobni položaji dve ravni

- Ravni α i β **se poklapaju** ako su jednačine proporcionalne.
- Ravni α i β **su paralelne** ako su im normalni vektori kolinearni.

Medjusobni položaji dve ravni

- Ravni α i β **se poklapaju** ako su jednačine proporcionalne.
- Ravni α i β **su paralelne** ako su im normalni vektori kolinearni.
- Ravni α i β **se seku po pravoj** ako su im normalni vektori nekolinearni, tj. $|\overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta}| \neq 0$.

Medjusobni položaji dve prave

Medjusobni položaji dve prave

- Prave p i q **se poklapaju** ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{PQ}$ kolinearni.

Medjusobni položaji dve prave

- Prave p i q **se poklapaju** ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{PQ}$ kolinearni.
- Prave p i q **su paralelne i različite** ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ kolinearni, a vektor $\overrightarrow{PQ}$ im nije kolinearan.

Medjusobni položaji dve prave

- Prave p i q **se poklapaju** ako i samo ako su vektori $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\overrightarrow{PQ}$ kolinearni.
- Prave p i q **su paralelne i različite** ako i samo ako su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ kolinearni, a vektor $\overrightarrow{PQ}$ im nije kolinearan.
- Prave p i q **se seku ako** i samo ako su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ nisu kolinearni, a vektori $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ su koplanarni.

Medjusobni položaji dve prave

- Prave p i q **se poklapaju** ako i samo ako su vektori $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\overrightarrow{PQ}$ kolinearni.
- Prave p i q **su paralelne i različite** ako i samo ako su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ kolinearni, a vektor $\overrightarrow{PQ}$ im nije kolinearan.
- Prave p i q **se seku ako** i samo ako su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ nisu kolinearni, a vektori $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ su koplanarni.
- Prave p i q **su mimoilazne** ako i samo ako vektori $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ nisu koplanarni.

Primer

Odrediti medjusobni položaj pravih

a) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-19}{5} = \dfrac{z-2}{1}, \qquad q : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{4}.$

b) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1} \qquad q : 2x = y, 3x = z$

c) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1} \qquad q : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-1}$

d) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1} \qquad q : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+7}{2}$

Mimoilazne prave

Mimoilazne prave

Teorema

Mimoilazne prave p i q imaju jedinstvenu **zajedničku normalu**, *tj. pravu n koja seče obe prave p i q i na njih je normalna.*

Mimoilazne prave

Teorema

Mimoilazne prave p i q imaju jedinstvenu **zajedničku normalu**, *tj. pravu n koja seče obe prave p i q i na njih je normalna.*

Teorema

Rastojanje izmedju mimoilaznih pravih p i q dato je sledećom formulom

$$d(p,q) = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\ \vec{p} \times \vec{q}\ |}.$$

Mimoilazne prave

Teorema

Mimoilazne prave p i q imaju jedinstvenu **zajedničku normalu**, *tj. pravu n koja seče obe prave p i q i na njih je normalna.*

Teorema

Rastojanje izmedju mimoilaznih pravih p i q dato je sledećom formulom

$$d(p,q) = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Primer

Odrediti zajedničku normalu i rastojanje izmedju mimoilaznih pravih

$$p : \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0} \qquad q : \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5}.$$

Medjusobni položaj prave i ravni

Prava može da

Medjusobni položaj prave i ravni

Prava može da

- pripada ravni;

Medjusobni položaj prave i ravni

Prava može da

- pripada ravni;
- da joj bude paralelna;

Medjusobni položaj prave i ravni

Prava može da

- pripada ravni;
- da joj bude paralelna;
- da seče ravan u jednoj tački.

Medjusobni položaj prave i ravni

Prava može da

- pripada ravni;
- da joj bude paralelna;
- da seče ravan u jednoj tački.

Primer

Data je ravan $\alpha : x - 2y + 5z - 1 = 0$. *Odrediti presek te ravni sa pravama:*

a) $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{7} = \frac{z}{1}$;
b) $q : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$;
c) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$;
d) $s : x - y = 1, x + y - z + 5 = 0$;
e) $t : x - z + 2 = 0, -y + 3z + 2 = 0$.

Uglovi izmedju pravih i ravni

Uglovi izmedju pravih i ravni

Ugao izmedju pravih p i q definišemo kao oštar ugao izmedju njihovih normalnih vektora, tj.

$$\angle(p,q) = \text{oštar}\angle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = \arccos \frac{|\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}|}{|\overrightarrow{p}||\overrightarrow{q}|}.$$

Uglovi izmedju pravih i ravni

Ugao izmedju pravih p i q definišemo kao oštar ugao izmedju njihovih normalnih vektora, tj.

$$\angle(p,q) = \text{oštar}\angle(\vec{p},\vec{q}) = \arccos\frac{|\vec{p}\cdot\vec{q}|}{|\vec{p}||\vec{q}|}.$$

Neka su data ravni α i β koje se seku po pravoj p.

Uglovi izmedju pravih i ravni

Ugao izmedju pravih p i q definišemo kao oštar ugao izmedju njihovih normalnih vektora, tj.

$$\angle(p,q) = \text{oštar}\angle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = \arccos \frac{|\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}|}{|\overrightarrow{p}||\overrightarrow{q}|}.$$

Neka su data ravni α i β koje se seku po pravoj p. Uočimo ravan γ normalnu na p koja te ravni seče redom po pravama a i b.

Uglovi izmedju pravih i ravni

Ugao izmedju pravih p i q definišemo kao oštar ugao izmedju njihovih normalnih vektora, tj.

$$\angle(p,q) = \text{oštar}\angle(\vec{p},\vec{q}) = \arccos\frac{|\vec{p}\cdot\vec{q}|}{|\vec{p}||\vec{q}|}.$$

Neka su data ravni α i β koje se seku po pravoj p. Uočimo ravan γ normalnu na p koja te ravni seče redom po pravama a i b. **Ugao izmedju ravni** α i β definišemo kao oštar ugao izmedju pravih a i b, tj.

$$\angle(\alpha,\beta) = \arccos\frac{|\vec{n_\alpha}\cdot\vec{n_\beta}|}{|\vec{n_\alpha}||\vec{n_\beta}|}.$$

Primer

Izračunati ugao ravni $\alpha : x + 2y - 3z - 1 = 0$ *i* $\beta : 2x - 3y + 4z + 2 = 0$ *(za računanje* arccos *koristiti digitron).*

Primer

Izračunati ugao ravni $\alpha : x + 2y - 3z - 1 = 0$ *i* $\beta : 2x - 3y + 4z + 2 = 0$ *(za računanje* arccos *koristiti digitron).*

Ugao izmedju prave p **i ravni** α je po definiciji ugao izmedju prave p i njene normalne projekcije p' na ravan α.

Primer

Izračunati ugao ravni $\alpha : x + 2y - 3z - 1 = 0$ *i*
$\beta : 2x - 3y + 4z + 2 = 0$ *(za računanje* arccos *koristiti digitron).*

Ugao izmedju prave p **i ravni** α je po definiciji ugao izmedju prave p i njene normalne projekcije p' na ravan α.
Analitički se taj ugao može izraziti kao:

$$\angle(p, \alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{n_\alpha}|}{|\overrightarrow{p}||\overrightarrow{n_\alpha}|}.$$

Primer

Izračunati ugao ravni $\alpha : x + 2y - 3z - 1 = 0$ *i*
$\beta : 2x - 3y + 4z + 2 = 0$ *(za računanje* arccos *koristiti digitron).*

Ugao izmedju prave p i ravni α je po definiciji ugao izmedju prave p i njene normalne projekcije p' na ravan α.
Analitički se taj ugao može izraziti kao:

$$\angle(p, \alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n_\alpha}|}{|\vec{p}||\vec{n_\alpha}|}.$$

Primer

Izračunati (koristeći digitron za arccos*) ugao izmedju prave*
$p : x + 2y - 3z - 1 = 0, x - z + 2 = 0$ *i ravni*
$\alpha : x - 4y + 2z + 2 = 0.$

Prodor prave p i trougla ABC

Prodor prave p i trougla ABC

Neka je prava p odredjena vektorom pravca $\overrightarrow{p}$ i tačkom $P \in p$.

Prodor prave p i trougla ABC

Neka je prava p odredjena vektorom pravca $\overrightarrow{p}$ i tačkom $P \in p$. Neka je $M = P + t\overrightarrow{p}$ $(M \neq P)$ prodorna tačka prave p kroz ravan trougla ABC i

Prodor prave p i trougla ABC

Neka je prava p odredjena vektorom pravca $\vec{p}$ i tačkom $P \in p$. Neka je $M = P + t\,\vec{p}\ (M \neq P)$ prodorna tačka prave p kroz ravan trougla ABC i $\vec{v} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{u} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{PC}$.

Prodor prave p i trougla ABC

Neka je prava p odredjena vektorom pravca $\vec{p}$ i tačkom $P \in p$.
Neka je $M = P + t\,\vec{p}$ $(M \neq P)$ prodorna tačka prave p kroz ravan trougla ABC i $\vec{v} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{u} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{PC}$.
Uslov da prava p seče trougao ABC je:

$$sign[\vec{v}, \vec{u}, \vec{p}] = sign[\vec{u}, \vec{w}, \vec{p}] = sign[\vec{w}, \vec{v}, \vec{p}]. \qquad (5)$$

Prodor prave p i trougla ABC

Neka je prava p odredjena vektorom pravca $\overrightarrow{p}$ i tačkom $P \in p$. Neka je $M = P + t\,\overrightarrow{p}$ $(M \neq P)$ prodorna tačka prave p kroz ravan trougla ABC i $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PC}$.

Uslov da prava p **seče trougao** ABC je:

$$sign[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{p}] = sign[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{p}] = sign[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{p}]. \tag{5}$$

U slucaju da prava seče trougao, presečna tačka se dobija za vrednost parametra

$$t = -\frac{[\overrightarrow{p}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]}{[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]}.$$

Primer

Ispitati da li prava $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-4}$ *seče trougao* ABC*, ako je* $A(2, 4, 6)$, $B(-4, 2, 0)$, $C(6, 4, -2)$. *U slučaju da seče odrediti koordinate presečne tačke.*

Presek ravni i trougla

Presek ravni i trougla moě biti:

Presek ravni i trougla

Presek ravni i trougla moě biti:

- prazan skup

Presek ravni i trougla

Presek ravni i trougla moě biti:

- prazan skup
- teme trougla

Presek ravni i trougla

Presek ravni i trougla moě biti:

- prazan skup
- teme trougla
- duž (koja nije ivica trougla)

Presek ravni i trougla

Presek ravni i trougla moě biti:

- prazan skup
- teme trougla
- duž (koja nije ivica trougla)
- ivica trougla

Presek ravni i trougla

Presek ravni i trougla moě biti:

- prazan skup
- teme trougla
- duž (koja nije ivica trougla)
- ivica trougla
- trougao može da pripada ravni.

Presek ravni i trougla

Presek ravni i trougla moě biti:

- prazan skup
- teme trougla
- duž (koja nije ivica trougla)
- ivica trougla
- trougao može da pripada ravni.

Primer

Odrediti presek trougla ABC i ravni $\alpha : x - y = 0$, *ako je* $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ *i* $C(1,2,3)$.

Homogene koordinate i centralna projekcija

Homogene koordinate i centralna projekcija

Koordinatama (x, y, z) prostora pridružujemo četiri **homogene koordinate** $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, $\;x_4 \neq 0$ tako da važi

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_1}{x_4}.$$

Homogene koordinate i centralna projekcija

Koordinatama (x, y, z) prostora pridružujemo četiri **homogene koordinate** $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, $x_4 \neq 0$ tako da važi

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_1}{x_4}.$$

Tačke za koje je $x_4 = 0$ se nazivaju **beskonačno daleke tačke**.

Homogene koordinate i centralna projekcija

Koordinatama (x, y, z) prostora pridružujemo četiri **homogene koordinate** $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, $x_4 \neq 0$ tako da važi

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_1}{x_4}.$$

Tačke za koje je $x_4 = 0$ se nazivaju **beskonačno daleke tačke**.

Teorema

Centrala projekcija iz taçke $O(0, 0, 0)$ na ravan $z = n$ je predstavljena 4x4 matricom

$$P = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Homogene koordinate i centralna projekcija

Koordinatama (x, y, z) prostora pridružujemo četiri **homogene koordinate** $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, $x_4 \neq 0$ tako da važi

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_1}{x_4}.$$

Tačke za koje je $x_4 = 0$ se nazivaju **beskonačno daleke tačke**.

Teorema

Centrala projekcija iz taçke $O(0,0,0)$ na ravan $z = n$ je predstavljena 4x4 matricom

$$P = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

primena u OpenGL-u (transformacije objekta (world coords), pozicioniranje kamere (eye coords), parametri kamere)