Poliedarske površi

Poliedarska površ $\mathcal{M}$ je objekat prostora $\mathbb{R}^3$ koji se sastoji od konačno mnogo temena, ivica i pljosni (konveksni poligoni) koji zadovoljavaju sledeće uslove:
1) svaka ivica je pripada bar jednoj pljosni(ivica ruba), a najviše dvema pljosnima (unutrašnja ivica);
2) presek dve pljosni može biti samo ivica.
Skup temena označavamo sa $\mathcal{T}$, ivica sa $\mathcal{I}$, a pljosni sa $\mathcal{P}$.

Unija svih ivica koje pripadaju samo jednoj pljosni (tj. svih rubnih ivica) naziva se **rub poliedarske površi**. Poliedarsku površ bez ruba zvaćemo **poliedrom**.

Pljosni koje imaju zajedničku ivicu nazivamo **susednim.** Poliedarska površ je **povezana** ako je svake dve njene pljosni moguće povezati nizom susednih pljosni.

Polidearska površ se zadaje **tabelom povezanosti** i koordinatama temena.

Ako zadamo samo tabelu povezanosti tada se radi o **apstrakt-nom poliedru**. Za njega ne znamo kako je smešten u prostoru i ne možemo ispitati uslov 2) iz definicije poliedarske površi. U nastavku radimo samo sa apstraktim poliedrima.

Primer 1 (Tabela povezanosti za tetraedar)

$$P_0 = \langle 1, 2, 3 \rangle, \quad P_1 = \langle 0, 2, 3 \rangle, \quad P_2 = \langle 0, 1, 3 \rangle, \quad P_3 = \langle 0, 1, 2 \rangle.$$

Brojevi $0, 1, 2, 3$ *predstavljaju temena* T_0, T_1, T_2, T_3 *tetraedra.*

Primer 2 *Data je tabela povezanosti* $p_0 = \langle 0, 1, 2\rangle$, $p_1 = \langle 2, 1, 6, 5\rangle$, $p_2 = \langle 2, 5, 4, 3\rangle$, $p_3 = \langle 3, 1, 6, 4\rangle$.

a) Odrediti skup ivica i temena.

b) Da li tabela povezanosti predstavlja poliedarsku površ (tj. ispitati uslov 1))

c) Ako je u pitanju poliedar odrediti mu rub i broj komponenata ruba.

d) skicirati polidear.

Zadatak 1 *Data je poliedarska površ pljosnima* $p_0 = \langle 5, 6, 7\rangle$, $p_1 = \langle 1, 3, 0\rangle$, $p_2 = \langle 4, 0, 1, 5\rangle$, $p_3 = \langle 6, 2, 1, 5\rangle$, $p_4 = \langle 7, 6, 2, 3\rangle$, $p_5 = \langle 3, 0, 4, 7\rangle$.

a) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.

b) Skicirati površ (Rešenje: Kocka, sa cijih su suprotnih strana isečena dva trougla).

Orjentabilnost poliedarske površi

Neka je $\mathcal{M}$ povezana poliedarska površ. Kažemo da su dve susedne pljosni **iste orjentacije**, ako različito orjentišu zajedničku ivicu.

Definicija 1 *Poliedarska površ $\mathcal{M}$ je* **orjentabilna** *ako njene pljosni možemo orjentisati tako da su svake dve susedne pljosni iste orjentacije.*

Orjentaciju pljosni iz prethodne definicije zovemo **orjentacija poliedarske površi $\mathcal{M}$.** Ako je poliedarska površ orjentabilna ona ima tačno dve orjentacije.

Primer 3 *Tetraedar $T_0T_1T_2T_3$ orjentabilna površ.*

Mebijusova traka - poliedarski model

Primer 4 Mebijusova traka je neorjentabilna površ. *Primetimo da je rub Mebijusove trake krug, tj. sastoji se samo iz jedne komponente.*

Teorema *Svi poliedarski modeli neke glatke površi su ili svi orjentabilni, ili svi neorjentabilni.*

Teorema *Svaki poliedar (bez samopreseka - uslov 2)) je orjentabilna površ.*

Ojlerova karakteristika i rod poliedarske površi

Ojlerova karakteristika poliedarske površi $\mathcal{M}$ je broj

$$\xi(\mathcal{M}) = T - I + P,$$

gde su T, I i P redom brojevi temena, ivica i pljosni te poliedarske površi.

Teorema *Svi poliedarski modeli iste glatke površi imaju istu Ojlerovu karakteristiku.*

Ako je $\mathcal{M}$ poliedar i $r(\mathcal{M})$ rod poliedra (on se intuitivno definiše kao "broj rupa") tada važi:

$$\xi(\mathcal{M}) = 2 - 2r(\mathcal{M}).$$

Recimo rod modela sfere, kao što su tetraedar, kocka je jednak 0 jer oni nemaju rupa. Odatle je $\xi(\mathcal{M}) = 2$ kad god je površ reda nula.

Ako je $\mathcal{M}$ model torusa tada je $\xi(\mathcal{M}) = 0$, jer torus ima jednu rupu, tj. $r(\mathcal{M}) = 1$.

Platonova tela

Topološki pravilnim poliedrom zovemo poliedar roda nula čije su sve pljosni poligoni sa q ivica, a svako u svakom temenu se sreće p ivica. Ako još zahtevamo da su sve te ivice jednake dužine onda takav poliedar zovemo **pravilan poliedar** ili **Platonovo telo**.

Teorema *Postoji tačno pet topološki pravilnih poliedara: tetaedar, kocka (heksaedar), oktaedar, dodekaedar i ikosaedar.*

poliedar	p	q	T	I	P
tetraedar	3	3	4	6	4
kocka	3	4	8	12	6
oktaedar	4	3	6	12	8
dodekaedar	3	5	20	30	12
ikosaedar	5	3	12	30	20