Neki jednostavni zadaci u ravni

Kao primer, navodimo dva jednostavna problema čije **rešenje je prilagodjeno strukturama** kojima predstavljamo tačku, pravu i ravan.

- Odrediti podnožje normale iz tačke C na pravoj p.

- Odrediti presek prave p i kruga k.

Primer 1 *Odrediti presek prave* $p : P(0,-1), \overrightarrow{p} = (1,1)$ *i kruga* $k : C(3,4), r = 2$.

Primer 2 *Odrediti jednačinu kruga i parametarsku jednačinu prave iz prethodnog zadatka. Zatim odrediti presek prave i kruga.*

Krive drugog reda u kanonskom obliku

Elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Parametarska jednačina elipse:

$$x = a\cos\phi, \quad y = b\sin\phi, \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

Hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Parametarska jednačina (desne grane) hiperbole:

$$x = \pm a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

Parabola

$$y^2 = 2px,$$

Fokusne osobine krivih drugog reda

Elipsa je skup tačaka ravni čiji je zbir rastojanja od dve fiksirane tačke (žiže elipse) konstantan ($MF_1 + MF_2 = 2a$).

Hiperbola je skup tačaka ravni čija je apsolutna vrednost razlike rastojanja od dve fiksirane tačke (žiže hiperbole) konstantna ($\|MF_1 - MF_2\| = 2a$).

Parabola je skup tačaka ravni koje su jednako udaljene od fiksirane prave (direktrisa) i fiksirane tačke (žiža) ($MF = d(M, d)$.)

Optičke osobine elipse, hiperbole i parabole.

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže elipse i odbija se od elipse, prolazi kroz drugu žižu elipse.

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže hiperbole i odbija se od hiperbole, (izgleda kao da) prolazi kroz drugu žižu hiperbole.

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže parabole i odbija se od parabole, paralelan je osi parabole (dokaz).

Svodjenje krive drugog reda na kanonski oblik

Kriva drugog reda je skup tačaka ravni čije koordinate (x, y) zadovoljavaju jednačinu drugog stepena

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

Teorema *Za svaku krivu (1) datu u ON reperu, postoji novi ON reper u čijim koordinatama* (x'', y'') *ona ima tačno jednu od jednačina:*

(E) $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$, *(elipsa),*

(H) $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$, *(hiperbola),*

(P) $y''^2 = 2px''$, *(parabola),*

(D1) $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1$, *(prazan skup),*

(D2) $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0$, (tačka),

(D3) $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0$, (dve prave koje se seku),

(D4) $x''^2 = a^2$, (dve paralelne prave),

(D5) $x''^2 = 0$, (''dvostruka'' prava),

(D6) $x''^2 = -a^2$, (prazan skup),

gde je $p > 0$, $a \geq b \geq 0$.

Dokaz: Ako je $a_{12} \neq 0$, radimo **rotaciju** za ugao ϕ koji je dat sa:

$$\cot 2\phi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}},$$

$$\cos 2\phi = \frac{\cot 2\phi}{+\sqrt{1 + \cot^2 2\phi}},$$

$$\cos \phi = +\sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}}, \qquad \sin \phi = +\sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}.$$

Zamenom jednačina rotacije

$$\begin{aligned} x &= \cos \phi x' - \sin \phi y' \\ y &= \sin \phi x' + \cos \phi y' \end{aligned} \tag{2}$$

u jednačinu krive (1) dobijamo jednačinu bez člana $x'y'$, recimo:

$$mx'^2 + ny'^2 + 2cx' + 2dy' + e = 0.$$

Sada se kriva svodi na kanonski oblik **translacijom**, tj. ”nameštanjem na pune kvadrate.” Ponekad je potrebno uraditi i jednostavnu **refleksiju**, tj. zamenu osa x i y. (kraj dokaza)

Primer 3 (treba znati ovaj primer za usmeni, ne za pismeni) *Izometrijskom transformacijom svesti na kanonski oblik krivu drugog reda* $4x^2 + 9y^2 - 2x + 2y - 12xy - 19 = 0$.

Rešenje: *Primenom formula dobijamo da je* $\cos 2\phi = \frac{5}{13}$. *Odatle je* $\cos\phi = \frac{3}{Sqrt[13]}$ *i da je* $\sin\phi = \frac{2}{Sqrt[13]}$. *Zamenom jednačina rotacije dobijamo*

$$-\frac{2x'}{\sqrt{13}} + \frac{10y'}{\sqrt{13}} + 13y'^2 - 19 = 0.$$

Zadatak 1 *Rotacijom svesti krive drugog reda na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč:*

a) $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 7 = 0$,

b) $x^2 + y^2 - xy + 1 = 0$;

Zadatak 2 *Translacijom svesti krivu drugog reda na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč:*

a) $x^2 - 3y^2 - 4x - 18y - 23 = 0$,

b) $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y + 8 = 0$.

c) $3y^2 + 6y - x - 1 = 0$.