Vektori i operacije sa vektorima

Definicija 1 **Vektor** *je klasa ekvivalencije usmerenih duži. Kažemo da su dve usmerene duži ekvivalentne, tj. predstavljaju isti vektor, ako imaju isti pravac, smer i intenzitet.*

Za svaku tačku A i vektor $\overrightarrow{v}$ postoji jedinstvena usmerena duž AB takva da je $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}$. Usmerenu duž AB je *predstavnik* vektora $\overrightarrow{AB}$.

kolinearni vektori, komplanarni vektori, nula vektor

Sa $\mathbb{V}$ označavamo skup svih vektora (ravni ili prostora, zavisi gde radimo).

Definicija 2 (Sabiranje vektora) *Neka je* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BC}$. *Zbir vektora* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$ *je vektor*

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} := \overrightarrow{AC}.$$

Definicija 3 (Množenje vektora skalarom (brojem)) *Neka je* $\alpha \in \mathbb{R}$ *broj i* $\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}^2$ *vektor. Proizvod* $\alpha \overrightarrow{v}$ *broja i vektora je vektor* $\overrightarrow{u}$ *koji ima:*

(P) isti pravac kao vektor $\overrightarrow{v}$*;*

(I) intenzitet $\| \overrightarrow{u} \| = |\alpha| \| \overrightarrow{v} \|$*;*

(S) smer vektora $\overrightarrow{u}$ *je isti kao smer vektora* $\overrightarrow{v}$ *ako* $\alpha > 0$, *a suprotan ako* $\alpha < 0$.

Razlika dva vektora

$$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} := \overrightarrow{v} + (-1)\,\overrightarrow{u}$$

je zbir vektora $\overrightarrow{v}$ i vektora $-1\,\overrightarrow{u}$, suprotnog vektoru $\overrightarrow{u}$.

Ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ brojevi, a $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ vektori, tada se izraz

$$\alpha_1\,\overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_n\,\overrightarrow{v_n}$$

naziva **linearna kombinacija vektora**.

Zadatak 1 *Vektori* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{EF}$ *su zadati svojim predstavnicima (na papiru). Odrediti predstavnika vektora*

$$\overrightarrow{v} - 2\,\overrightarrow{u} + 3\,\overrightarrow{w}\,.$$

Skup $\mathbb{V}$ svih vektora (ravni ili prostora) je *vektorski prostor* u smislu Linearne algebre, tj. važi

Teorema *Ako su* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}$ *vektori, a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *realni brojevi tada važi:*

(S1)	$\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{w}$,	*(M1)*	$\alpha(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) = \alpha \overrightarrow{v} + \alpha \overrightarrow{u}$,
(S2)	$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v}$,	*(M2)*	$\alpha(\beta \overrightarrow{v}) = (\alpha\beta) \overrightarrow{v}$,
(S3)	$\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$,	*(M3)*	$(\alpha + \beta) \overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{v} + \beta \overrightarrow{v}$,
(S4)	$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$;	*(M4)*	$1 \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.

Zadatak 2 *Dokazati prethodnu teoremu.*

Zadatak 3 *Dokazati da je* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *ako i samo ako se duži* AD *i* BC *polove.*

Koordinate vektora i tačaka

Baza vektorskog prostora je maksimalan skup linearno nezavisnih vektora. **Dimenzija vektorskog prostora** je broj elemenata baze. Na osnovu prethodnog dimenzija ravni je dva, a dimenzija prostora tri.

Neka je $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ neka baza vektora ravni. Ako za neki vektor $\overrightarrow{v}$ važi

$$\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{e_1} + v_2 \overrightarrow{e_2}$$

tada kažemo da su (v_1, v_2) **koordinate vektora** $\overrightarrow{v}$ **u bazi** e i pišemo

$$[\overrightarrow{v}]_e = (v_1, v_2).$$

Slično se za bazu prostora $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ definišu koordinate vektora u prostoru

$$[\overrightarrow{v}]_e = (v_1, v_2, v_3).$$

Zadatak 4 *Dat je paralelogram $OABC$. Tačke P i Q su središta ivica AB i BC, redom. Odrediti koordinate vektora $\overrightarrow{PQ}$ u bazi $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, ako je $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{OC}$.*

Neka je e baza vektorskog prostora i O fiksirana tačka (**koordinatni početak**). Tada se Oe naziva **koordinatni sistem ili reper**.

Definicija 4 Koordinate tačke M **reperu** Oe *definišemo kao koordinate vektora* $\overrightarrow{OM}$ *u bazi* e*, tj.*

$$[M]_{Oe} := [\overrightarrow{OM}]_e.$$

Koordinate vektora se dobijaju oduzimanjem koordinata tačaka:

$$[\overrightarrow{MN}]_e = [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e = [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e = [N]_{Oe} - [M]_{Oe}.$$

Zadatak 5 *Neka je* $OABC$ *paralelogram, i neka je* $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *baza. Odrediti koordinate temena paralelograma u reperu* Oe*.*

Zadatak 6 *Dat je pravilan šestougao* $ABCDEF$. *Ako je* $e = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})$ *odrediti koordinate temena šestougla u reperu* Ae.