Ugao izmedju dve prave

Ugao izmedju pravih p i q definišemo kao oštar ugao izmedju njihovih normalnih vektora, tj.

$$\angle(p,q) = \text{oštar}\angle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = \arccos\frac{|\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}|}{|\overrightarrow{p}||\overrightarrow{q}|}.$$

Ugao izmedju dve ravni

Neka su data ravni α i β koje se seku po pravoj p. Uočimo ravan γ normalnu na p koja te ravni seče redom po pravama a i b. **Ugao izmedju ravni** α i β definišemo kao oštar ugao izmedju pravih a i b. Dakle, ugao izmedju ravni računamo sledećom formulom

$$\angle(\alpha,\beta) = \arccos\frac{|\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}||\overrightarrow{n_\beta}|}.$$

Zadatak 1 *Izračunati ugao ravni* $\alpha : x + 2y - 3z - 1 = 0$ *i* $\beta : 2x - 3y + 4z + 2 = 0$ *(za računanje* arccos *koristiti digitron).*

Ugao izmedju prave i ravni

Ugao izmedju prave p i ravni α je po definiciji ugao izmedju prave p i njene normalne projekcije p' na ravan α.

Uz pomoć normalnog vektora $\overrightarrow{n_\alpha}$ ravni α i vektora pravca $\overrightarrow{p}$ prave p taj se ugao može izraziti kao:

$$\angle(p,\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos} \frac{|\ \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{n_\alpha}\ |}{|\ \overrightarrow{p}\ ||\ \overrightarrow{n_\alpha}\ |}.$$

Zadatak 2 *Izračunati (koristeći digitron za* arccos*) ugao izmedju prave* $p : x+2y-3z-1 = 0, x-z+2 = 0$ *i ravni* $\alpha : x-4y+2z+2 = 0$.

Zadatak 3 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku* $M(-1,0,3)$ *i normalna je na pravu* $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

Zadatak 4 *Odrediti tačku* Q *koja je simetrična tački* $P(3,-2,-4)$ *u odnosu na ravan* $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ *kao i projekciju* P' *tačke* P *na ravan* α.

Zadatak 5 *Odrediti jedančinu ravni koja sadrži pravu* $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ *i normalna je na ravan* $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.

Zadatak 6 *Odrediti* λ *tako da se prave* $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ *i* $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ *seku. Koje su koordinate presečne tačke?*

Prodor prave p i trougla ABC

Neka je prava p odredjena vektorom pravca $\overrightarrow{p}$ i tačkom $P \in p$. Neka je $M \neq P$ prodorna tačka prave p kroz ravan trougla ABC i $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{PC}$. Tada je uslov da prava p seče trougao ABC dat uslovom da su sledeća tri mešovita proizvoda istog znaka:

$$sign[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{p}] = sign[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{p}] = sign[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{p}]. \tag{1}$$

U slucaju da prava seče trougao, presečna tačka se moze izracunati tako što se nadje jednačina ravni ABC, a zatim se odredi njen presek sa pravom. Postoje i optimalniji nacini koji koriste mešovite proizvode iz formule (1).

Zadatak 7 *Ispitati da li prava* $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-4}$ *seče trougao* ABC*, ako je* $A(2,4,6)$*,* $B(-4,2,0)$*,* $C(6,4,-2)$*. U slučaju da seče odrediti koordinate presečne tačke.*

Presek ravni i trougla

Presek ravni i trougla može biti: prazan skup, teme trougla, duž (koja nije ivica trougla), ivica trougla ili trougao može da pripada ravni. Jednostavan način da se odredi taj presek je da se svaka ivica trougla seče sa ravni.

Primer 1 *Odrediti presek trougla ABC i ravni $\alpha : x - y = 0$, ako je $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ i $C(1,2,3)$.*

Zadatak 8 *Odrediti presek trougla ABC i ravni $\alpha : x-y+2z-3 = 0$, ako je $A(1,-2,0)$, $B(-1,2,3)$ i $C(2,1,3)$.*

Presek dva trougla

Projektovanje na ravan

Rotacije u prostoru