Vektori

Vektor nije usmerena duž, već **klasa ekvivalencije** usmerenih duži. Kažemo da su dve usmerene duži ekvivalentne, tj. predstavljaju isti vektor, ako imaju isti **pravac, smer i intenzitet**.

Za svaku tačku A i vektor $\overrightarrow{v}$ postoji jednstvena usmerena duž AB da je $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.

kolinearni vektori, komplanarni vektori, nula vektor

Sa $\mathbb{V}$ označavamo skup svih vektora (ravni ili prostora, zavisi gde radimo).

Sabiranje vektora

Neka je $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BC}$. **Zbir vektora** $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{u}$ je vektor

$$\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AC}\ .$$

Množenje vektora skalarom (brojem)

Neka je $\alpha\in\mathbb{R}$ broj i $\overrightarrow{v}\in\mathbb{V}$ vektor. **Proizvod** $\alpha\overrightarrow{v}$ **broja i vektora** je vektor $\overrightarrow{u}$ koji ima isti

isti pravac kao vektor $\overrightarrow{v}$,

intenzitet $|\overrightarrow{u}|=|\alpha||\overrightarrow{v}|$

smer $\overrightarrow{u}$ je isti kao smer $\overrightarrow{v}$ ako $\alpha>0$, a suprotan ako $\alpha<0$.

Razlika dva vektora

$$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + (-1)\overrightarrow{u}$$

je zbir vektora $\overrightarrow{v}$ i vektora $-1\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$ suprotnog vektoru $\overrightarrow{u}$.

Ako su $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ brojevi, a $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ vektori, tada se izraz

$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{v_n}$$

naziva **linearna kombinacija vektora**.

Skup $\mathbb{V}$ svih vektora je **vektorski prostor**, tj. važi

Teorema 1 *Ako su* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}$ *vektori, a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *realni brojevi tada je:*

(S1) $\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{w}$,

(S2) $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v}$,

(S3) $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$,

(S4) $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$;

(M1) $\alpha(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) = \alpha \overrightarrow{v} + \alpha \overrightarrow{u}$,

(M2) $\alpha(\beta \overrightarrow{v}) = (\alpha\beta) \overrightarrow{v}$,

(M3) $(\alpha + \beta) \overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{v} + \beta \overrightarrow{v}$,

(M4) $1 \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.

Zadatak 1 *Dokazati prethodnu teoremu.*

Zadatak 2 *Dokazati da je* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ *ako i samo ako se duži* AD *i* BC *polove.*

Linearna (ne)zavisnost vektora

Definicija 1 *Vektori* $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ *su* **linearno nezavisni** *ako iz relacije*

$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$$

sledi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. *U suprotnom, kada je bar jedan od brojeva* α_i *različit od nule vektori se nazivaju* **linearno zavisnim**.

Naprimer, **dva vektora su linearno zavisni ako i samo ako su kolinearni.**

Teorema 2 *U vektorskom prostoru* $\mathbb{V}^2$ *(tj. u ravni) postoje dva linearno nezavisna vektora, a svaka tri vektora su linearno zavisna.*

Dakle, **tri vektora su linearno zavisni ako i samo ako su koplanarni.**

Teorema 3 *U vektorskom prostoru* $\mathbb{V}^3$ *(tj. u prostoru) postoje tri linearno nezavisna vektora, a svaka četiri vektora su linearno zavisna.*

Koordinate vektora

Baza vektorskog prostora je maksimalan skup linearno nezavisnih vektora. **Dimenzija vektorskog prostora** je broj elemenata baze.

Neka je $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ neka baza prostora $\mathbb{V}^2$ (tj. ravni). Ako za neki vektor $\overrightarrow{v}$ važi

$$\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{e_1} + v_2 \overrightarrow{e_2}$$

tada kažemo da su (v_1, v_2) **koordinate vektora** $\overrightarrow{v}$ **u bazi** e i pišemo

$$[\overrightarrow{v}]_e = (v_1, v_2).$$

Slično se definišu koordinate vektora u prostoru

$$[\overrightarrow{v}]_e = (v_1, v_2, v_3).$$

Koordinate tačaka

Sa $\mathbb{E}$ označavamo prostor tačaka ($\mathbb{E}^2$ -ravan, $\mathbb{E}^3$ - prostor).

Neka je e baza odgovarajućeg vektorskog prostora $\mathbb{V}$ i $O \in \mathbb{E}$ fiksirana tačka. Tada se Oe naziva **koordinatnim sistemom** ili **reperom** prostora $\mathbb{E}$.

Definicija 2 Koordinate tačke $M \in \mathbb{E}$ **u reperu** Oe *definišemo kao koordinate vektora* $\overrightarrow{OM}$ *u bazi* e, *tj.*

$$[M]_{Oe} \stackrel{def}{=} [\overrightarrow{OM}]_e.$$

Koordinate vektora se dobijaju oduzimanjem koordinata tačaka:

$$[\overrightarrow{MN}]_e = [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e = [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e = [N]_{Oe} - [M]_{Oe}.$$

Primer 3 *Neka je $OABC$ paralelogram, i neka je $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ baza. Odrediti koordinate temena paralelograma u vektoru Oe.*

Zadatak 4 *Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$. Ako je $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AF}$, odrediti koordinate temena šestougla u reperu Ae.*

Definicija 3 Skalarni proizvod vektora *je preslikavanje* $\cdot : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *koja dvama vektorima* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{V}$ *dodeljuje broj*

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}| \cos\phi,$$

gde je $\phi \in [0, \pi)$ *(neorjentisani) ugao izmedju vektora* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$*.*

Znak skalarnog proizvoda nam govori da li je ugao medju vektorima oštar, prav ili tup.

Teorema 4 (Osobine skalarnog proizvoda) *Neka su* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Tada važi:*

1) $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

2) $\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$,

3) $\overrightarrow{v} \cdot (\alpha \overrightarrow{u}) = \alpha(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u})$,

4) $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|^2 \geq 0$,

5) $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ *ako i samo ako je* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Skalarni proizvod u ortonormiranoj bazi

Ortonormirana baza je ona baza čiji su svi vektori medjusobno ortogonalni i jedinični.

Za skalarni prozvod vektora ortonormirane baze $e = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ važi:

$$\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \begin{cases} 0 & \text{ako je} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{ako je} \quad i = j. \end{cases}$$

Skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{e_1} + v_2 \overrightarrow{e_2}$**,** $\overrightarrow{u} = u_1 \overrightarrow{e_1} + u_2 \overrightarrow{e_2}$ **datih u ortonormiranoj bazi je:**

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2,$$

U prostoru važi slična formula

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3.$$

Nadalje u kursu pretpostavljamo da su baze ortonormirane, ako nije rečeno drugačije.

Pomoću skalarnog proizvoda vektora mogu se računati dužine i uglovi:

$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

$$\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|}.$$

Zadatak 5 *Dati su vektori* $\overrightarrow{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ *i* $\overrightarrow{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ *iz* $\mathbb{V}^3$ *svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a)* $|\overrightarrow{v}|$; *b)* $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.

Zadatak 6 *Dokazati da simetrala ugla u trouglu deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana.*

Zadatak 7 *Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).*

Orjentacija u ravni i prostoru

S obzirom da je strogo, matematičko uvodjenje orjentacije relativno složeno, orjentaciju ćemo uvesti intuitivno. Važno je razumeti **da je orjentacija stvar dogovora** - ne postoji naročit razlog da neku orjentaciju zovemo pozitivnom, tj. negativnom.

Trougao ABC **u ravni je pozitivne orjentacije** ako je smer obilaska njegovih temena suprotan smeru kazaljke na satu.

Baza ravni $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ **, je pozitivne orjentacije,** ako je trougao OAB pozitivne orjentacije.

Orjentacija baze prostora $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2})$ se odredjuje pravilom desne ruke (ili zavrtnja).

Vektorski proizvod

Definicija 4 *Vektorski proizvod je operacija* $\times : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ *koja dvama vektorima* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$ *dodeljuje vektor* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ *kome su intenzitet, pravac i smer odredjeni sa:*

(I) $|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}| \sin\phi$, *gde je* $\phi \in [0, \pi)$ *ugao izmedju* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$.

(P) vektor $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ *je normalan na* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$.

(S) smer vektora $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ *je takav da je baza* $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$ *pozitivne orjentacije.*

Primetimo da je na osnovu (I) intenzitet vektorskog proizvoda jednak površini paralelograma razapetog vektorima koje množimo.

Dakle, **vektori $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}$ prostora su linearno nezavisni (nekolinearni) ako i samo ako** $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

Pretpostavimo da je $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ ortonormirana baza pozitivne orjentacije. Važi sledeća tablica vektorskog proizvoda:

$$\begin{array}{c|ccc}
\times & \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\
\hline
\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{0} & \overrightarrow{e3} & -\overrightarrow{e_2} \\
\overrightarrow{e_2} & -\overrightarrow{e_3} & \overrightarrow{0} & \overrightarrow{e_1} \\
\overrightarrow{e_3} & \overrightarrow{e_2} & -\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{0}
\end{array}$$

Odatle se lako izvodi da je u koordinatama

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = (v_2u_3 - v_3u_2)\overrightarrow{e_1} + (v_3u_1 - v_1u_3)\overrightarrow{e_2} + (v_1u_2 - v_2u_1)\overrightarrow{e_3} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Vektorski prozivod se može koristiti za **računanje površine trougla** $\triangle ABC$. Naime

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} | \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} |.$$

Zadatak 8 *Odrediti površinu trougla odredjenog* ABC*, ako je* $A(1,2)$*,* $B(2,3)$*,* $C(-3,4)$*.*

Zadatak 9 *Koristeći vektorski proizvod proveriti da li su tačke* $A(1,1), B(2,3), C(-1,-3)$ *kolinearne.*