Parametrizacija trougla

Tri nekolinearne tačke A, B i C odredjuju trougao ABC. Neka je $\overrightarrow{f_1}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{f_2}=\overrightarrow{AC}$. Tada se svaka tačka trougla može zapisati u obliku

$$X(t_1, t_2) = A + t_1 \overrightarrow{f_1} + t_2 \overrightarrow{f_2}, \quad 0 \leq t_0, t_1 \leq 1, t_0 + t_1 \leq 1.$$

Prethodna jednačina se naziva **parametarska jednačina trougla**.
Napomena: ako se izostavi uslov $t_0 + t_1 \leq 1$ dobija se parametrizacija odgovarajućeg paralelograma.

Primer 1 *Date su tačke* $A(1, 3)$, $B(2, -5)$, $C(-2, 4)$. *Odrediti bar* 5 *tačaka koje pripadaju unutrašnjosti trougla.*

Zadatak 1 *Data je prava* $q : x = -t + 4, y = 2t - 7, t \in \mathbb{R}$.
a) Odrediti implicitni oblik prave q.
b) Odrediti implicitni oblik prave r *koja sadrži tačku* $R(3, 7)$ *i paralelna je* q.

Zadatak 2 *Odrediti jednačinu normale* n *iz tačke* $A(1, 7)$ *na pravu* p *ako je*
a) $p : x = 2t + 4, y = 3t - 5, t \in \mathbb{R}$,
b) $p : 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0$.

Zadatak 3 *Ispitati da li tačke* $C(1, 1)$ *i* $D(-7, 11)$ *pripadaju istoj poluravni odredjenoj pravom* AB, $A(2, -2), B(1, 3)$.

Presek pravih datih parametarski

Pretpostavimo da su **date dve prave: prava** p **tačkom** P **i vektorom** $\overrightarrow{p}$ **i prava** q **tačkom** Q **i vektorom** $\overrightarrow{q}$**.** Cilj nam je da odredimo presek tih dveju pravih, ako postoji. Tačke $M = P + t\overrightarrow{p}$ i $N = Q + s\overrightarrow{q}$ za $t, s \in \mathbb{R}$. Iz uslova da se prave seku, tj. $M = N$, dobijamo sledeće.

1) $D(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) \neq 0$ **Seku se:** $s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{p})}{D(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})}$ ili $t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{q})}{D(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})}$

2) $D(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = 0$ i $D(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{p}) = 0$ **Prave se poklapaju**

3) $D(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = 0$ i $D(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{p}) \neq 0$, **Prave su paralelne.**

```
typedef struct {
    float x;
    float y;
} Tacka;

typedef struct {
    Tacka start;
    Tacka pravac;
} Prava;

typedef struct {
    Tacka centar;
    float r;
} Krug;

typedef struct {

    Tacka start;

    Tacka end;

} Duz;
```

```
int PresekPravih(Tacka P, Tacka pp, Tacka Q, Tacka qq, Point *X){

epsilon2 = 0.000001;
float s, pq2, dpqpp;
Tacka pq = Q-P;
float dppqq = pp.x * qq.y - pp.y;
float dppqq2 = dppqq * dppqq;
float pp2 = pp.x * pp.x + pp.y * pp.y;
float qq2 = qq.x * qq.x + qq.y * qq.y;

if (dppqq2 > epsilon2 * pp2 * qq2){     // prave se seku
       s = (pq.x * p.y - pq.y * p.x)/ dppqq;
       *X = P + s * pp;
       return 1;
}        // prave su paralelne ili se poklapaju
pq2 = pq.x * pq.x + pq.y * pq.y;
dpqpp = pq.x * pp.y - pq.y * pp.x;
dpqpp2 = dpqpp * dpqpp;
if (dpqpp2 > epsilon2 * pq2 * pp2){
       return 0;     // prave su paralelne
}
return 2;        // prave se poklapaju
}
```

Presek duži, polupravih i pravih

Ako su date duži

$$AB : M = A + t\,\overrightarrow{AB}, \;\; t \in [0,1]$$

$$CD : N = C + s\,\overrightarrow{CD}, \;\; s \in [0,1],$$

presek se odredjuje slično kao i presek pravih.

1) Ako se desi prvi slučaj potrebno je još proveriti da li $t, s \in [0,1]$.

2) Ako se desi drugi slučaj potrebno je proveriti da li se duži poklapaju i "koliko".

3) U trećem slučaju duži se definitivno ne seku jer pripadaju različitim pravama.

Rastojanja tačke od prave

Teorema *Rastojanje tačke M od prave p koja je zadata svojom tačkom P i vektorom pravca $\overrightarrow{p}$ dato je jednačinom*

$$d = \frac{|\ \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}\ |}{|\ \overrightarrow{p}\ |}.$$

Ova formula bez izmena važi i u prostoru.

Teorema *Rastojanje tačke $M(x_0, y_0)$ od prave p : $ax+by+c=0$ dato je formulom*

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Poligonska linija i poligon u ravni

Definicija 1 Poligonska linija $A_0A_1 \dots A_n$ *je unija duži* A_0A_1, A_1A_2, $\dots A_{n-1}A_n$. *Duži* A_iA_{i+1} *se zovu* **ivice** , *a tačke* A_i **temena** *poligonske linije. Duži koje spajaju nesusedna temena zovu se* **dijagonale poligona**. *Poligonska linija je* **zatvorena** *ako je* $A_n = A_0$. *Zatvorena poligonska linija se zove i* **poligon**. *Poligonska linija je* **prosta** *ako se nikoje dve ivice ne seku, sem što susedne ivice imaju zajedničko teme.*

Poligonske linije su osnovni grafički objekti u računarstvu. Oni se koriste za predstavljanje i aproksimaciju $2D$ objekata, a projekcije $3D$ poligona (kojima se aproksimiraju $3D$ objekti) su opet $2D$ poligoni.

Unutrašnjost i spoljašnjost poligona

Neka je dat prost poligon $p = A_0 A_1 \ldots A_{n-1}, (A_n = A_0)$ i tačka M koja mu ne pripada. Ako je a poluprava sa temenom M koja ne sadrži ni jedno teme poligona, označimo sa $k(a)$ broj presečnih tačaka poligona i poluprave a.

Kažemo da tačka A **pripada unutrašnjosti poligona** p ako je $k(a)$ neparan, a **spoljašnosti poligona** ako je $k(a)$ paran.

Lema 1 *Parnost broja $k(a)$ ne zavisi od izbora poluprave a, tj. definicija unutrašnjosti i spoljašnjosti poligona su dobre.*

Dakle, svaki prost poligon razbija ravan koju pripada na unutrašnjost i spoljašnost (koje su povezani likovi).

Triangulacija poligona

Triangulacija poligona je razbijanje unutrašnjosti poligona unutrašnjim dijagonalama koje se ne seku.

Lema 2 *Svaki prost poligon sa više od tri temena ima unutrašnju dijagonalu.*

Dokaz:

Teorema *Svaki prost poligon se može triangulisati. Triangulacija poligona sa n temena ima tačno $n-2$ trougla.*

Dokaz: Potpunom indukcijom.