Zadatak 1 (*) *U odnosu na tačku O dati su vektori položaja $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ tačaka A i B ($A \neq B$). Izraziti vektor položaja tačke C takve da*

a) $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$ *(rešenje* $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{OB}$*)*

b) C *deli duž* AB *u odnosu* $p : q$ *(reš:* $\overrightarrow{OC} = \frac{q}{p+q} \overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q} \overrightarrow{OB}$ *.)*

Primetimo da tačka C data sa $\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ pripada pravoj AB ako i samo ako $\alpha + \beta = 1$.

Težište T **trougla** ABC je presek težišnih duži (duži koje spajaju teme trougla sa središtem naspramne ivice). Ako je O proizvoljna tačka, težište trougla je dato sa

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Ako je tačka O koordinatni početak, koordinate vektora i krajeva usmerenih duži koje ih predstavljaju se poklapaju, pa možemo pisati

$$T = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Težište sistema od n tačaka $A_1, \ldots, A_n$ (ravni ili prostora) se definiše slično

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA}_1 + \cdots + \overrightarrow{OA}_n).$$

Skalarni proizvod

Definicija 1 Skalarni proizvod vektora *je preslikavanje koje dvama vektorima dodeljuje broj*

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} := \| \overrightarrow{v} \| \| \overrightarrow{u} \| \cos \phi$$

gde je $\phi \in [0, \pi)$ *(neorjentisani) ugao izmedju vektora* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$ *.*

Znak skalarnog proizvoda nam govori da li je ugao medju vektorima oštar, prav ili tup.

Pomoću skalarnog proizvoda vektora mogu se računati dužine

$$\| \overrightarrow{v} \| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$$

i uglovi

$$\cos\angle(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Ortonormirana baza je ona baza čiji su svi vektori medjusobno ortogonalni i jedinični. Dakle, baza $e = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ ortonormirana ako važi $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_i} = 1$ za iste vektore i $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = 0$ za različite vektore.

Odatle sledi (vidi predavanja) da je skalarni proizvod vektora $v = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$ i $u = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2}$ datih u ortonormiranoj bazi jednak

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = v_1u_1 + v_2u_2.$$

U prostoru važi slična formula

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3.$$

Zadatak 2 *Dati su vektori* $\overrightarrow{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ *i* $\overrightarrow{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ *iz* $\mathbb{V}^3$ *svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a)* $\| \overrightarrow{v} \|$; *b)* $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.

Zadatak 3 (*) *Dokazati da simetrala ugla u trouglu* ABC *deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana.*

Zadatak 4 (*) *Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).*

Orjentacija u ravni i prostoru

S obzirom da je strogo, matematičko uvodjenje orjentacije relativno složeno, orjentaciju ćemo uvesti intuitivno (mada je na kraju kursa uvodimo i formalno). Važno je razumeti da **orjentacija je stvar dogovora** - ne postoji naročit razlog da neku orjentaciju zovemo pozitivnom, tj. negativnom.

Trougao ABC u ravni je pozitivne orjentacije ako je smer obilaska njegovih temena suprotan smeru kretanja kazaljke na satu.

Baza ravni $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ je pozitivne orjentacije, ako je trougao OAB pozitivne orjentacije.

Orjentacija baze prostora $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ se odredjuje "pravilom desne ruke" (predavanja).

Definicija 2 *Vektorski proizvod je operacija koja dvama vektorima prostora* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$ *dodeljuje vektor* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ *kome su intenzitet, pravac i smer odredjeni sa:*

(I) $|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}| \sin\phi$*, gde je* ϕ *ugao izmedju* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$*.*

(P) vektor $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ *je normalan na svaki od vektora* $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{u}$*.*

(S) smer vektora $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ *je takav da je baza* $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$ *pozitivne orjentacije.*

Primetimo da je na osnovu (I) intenzitet vektorskog proizvoda jednak površini paralelograma razapetog vektorima koje množimo. Dakle, **vektori** $\overrightarrow{v}$ **i** $\overrightarrow{u}$ **prostora su linearno nezavisni ako i samo ako je** $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

Teorema (osobine vektorskog proizvoda) *Za vektore* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}$ *prostora i brojeve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *važi:*

1) $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *(antisimetričnost),*

2) $(\alpha \overrightarrow{v} + \beta \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{w} = \alpha(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) + \beta(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w})$ *(linearnost),*

Primetimo da vektorski proizvod **nije komutativan**, već antikomutativan. Može se lako pokazati da vektorski proizvod **nije ni asocijativan**.

Za ortonormiranu bazu $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ pozitivne orjentacije važe sledeći proizvodi

$\times$	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{e_3}$	$-\overrightarrow{e_2}$
$\overrightarrow{e_2}$	$-\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_2}$	$-\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{0}$

Neka su $\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{e_1} + v_2 \overrightarrow{e_2} + v_3 \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u} = u_1 \overrightarrow{e_1} + u_2 \overrightarrow{e_2} + u_3 \overrightarrow{e_3}$ dva vektora prostora. Lako se proverava da važi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} &= (v_2u_3 - v_3u_2)\overrightarrow{e_1} + (v_3u_1 - v_1u_3)\overrightarrow{e_2} + (v_1u_2 - v_2u_1)\overrightarrow{e_3} = \\ &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Iako je vektorski proizvod definisan za vektore prostora, veoma je koristan i za rad u ravni. U nastavku ćemo koristiti vektorski prozivod za: **računanje površine trougla, proveru kolinearnosti tačaka, ispitivanje orjentacije trougla, proveru da li tačka M pripada trouglu ABC.**

Neka su $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i $C(c_1, c_2)$ tačke ravni. Za računanje vektorskog prozvoda vektora ravni stavljamo da je treća koordinata jednaka 0, tj. smatramo da radimo u ravni $z = 0$ prostora. Lako se proveri da je

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} =: D_{ABC} \overrightarrow{e_3} .$$

U prethodnoj formuli uveli smo oznaku D_{ABC} koja nam je važna u nastavku. Naime, lako se vidi (predavanja) da važi:

- **površina trougla** ABC je $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|D_{ABC}|$.
- **tačke** A, B, C **ravni su kolinearne** ako i samo ako $D_{ABC} = 0$.
- **trougao** ABC **je pozitivne orjentacije** ako $D_{ABC} > 0$.

- **tačka** M **pripada trouglu** ABC ako i samo ako su D_{ABM}, D_{BCM} i D_{CAM} istog znaka.

Zadatak 5 *Odrediti površinu trougla odredjenog* ABC*, ako je* $A(1,2)$*,* $B(2,3)$*,* $C(-3,4)$*. Da li je trougao* ABC *pozitivne orjentacije?*