Zadaci za pripremu drugog kolokvijuma iz Geometrije

2. januar 2009.

1 Bezijerove krive

1.1 *a) Date su tačke* $A_0(1,7)$, $A_1(-3,3)$, $A_2(3,-3)$. *Odrediti Bezijerovu krivu* $\alpha(t), t \in [0,1]$ *stepena* 2 *čije su to kontrolne tačke.*
b) Da li je tangenta te krive u tački $\alpha(\frac{1}{2})$ *paralelna pravoj* A_0A_2?

1.2 *Date su tačke* $A_0(0,1)$, $A_1(1,2)$, $A_2(2,1)$, $A_3(1,0)$. *Odrediti Bezijerovu krivu stepena* 3 *čije su to kontrolne tačke.*

2 Krive drugog reda

2.1 (*) *Dokazati da je tangenta* p *u tački* $M_0(x_0,y_0)$ *elipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *data jednačinom*

$$p : \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

2.2 *Rotacijom svesti krive drugog reda na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč:*
a) $2x^2+3xy-2y^2-7=0$,
b) $x^2+y^2-xy+1=0$;

2.3 *Translacijom svesti krivu drugog reda na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč:*
a) $x^2-3y^2-4x-18y-23=0$,
b) $x^2+5y^2-4x-10y+8=0$.
c) $3y^2+6y-x-1=0$.

3 Prava i ravan u prostoru

3.1 *Ravni* $x-y-2=0$ *odrediti parametarski jednačinu.*

3.2 *Odrediti implicitni oblik ravni* α :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2 & - & 3t & + & s, \\ y & = & 3 & - & t & - & s \\ z & = & 1 & & & + & 2s. \end{array}$$

3.3 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke* $A(1,2,3)$*,* $B(-1,2,-1)$ *i* $C(0,0,1)$.

3.4 *Pravu* $p: x = t+4, y = -2t+1, z = 3t-2, t \in \mathbb{R}$ *zapisati kao presek dve ravni.*

3.5 *Pravu* $p: x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$ *zapisati parametarski.*

3.6 *Odrediti rastojanje tačke* $M(1,0,12)$ *od prave* $p: x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

3.7 *Odrediti rastojanje tačke* $M(1,0,12)$ *od ravni* $\alpha: x - y - 4z = 0$.

3.8 *Odrediti jednačinu ravni* α *koja sadrži pravu* $p: x = 4t-2, y = t+2, z = -2t-2$*, i čije je rastojanje od tačke* $M(3,2,1)$ *jednako* $\sqrt{14}$.

3.9 *Odrediti medjusobni položaj pravih (i presečnu tačku ako postoji) pravih:*

$$a)\quad p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q: 2x = y, 3x = z$$

$$b)\quad p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$

$$b)\quad p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$$

3.10 *Odrediti parametrizaciju kruga poluprečnika* $r = 3$ *sa centrom u tački* $C(1,1,2)$*, ako krug pripada ravni* $\alpha: x + y - 3z + 4 = 0$.

3.11 *Odrediti zajedničku normalu i rastojanje izmedju mimoilaznih pravih* $p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ *i* $q: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

3.12 *Data je ravan* $\alpha: x - 2y + 5z - 1 = 0$. *Odrediti presek te ravni sa pravama:*
a) $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{7} = \frac{z}{1}$;
b) $q: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$;
c) $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$;
d) $s: x - y = 1, x + y - z + 5 = 0$;
e) $t: x - z + 2 = 0, -y + 3z + 2 = 0$.

3.13 *Izračunati ugao ravni* $\alpha: x + 2y - 3z - 1 = 0$ *i* $\beta: 2x - 3y + 4z + 2 = 0$ *(za računanje* arccos *koristiti digitron).*

3.14 *Odrediti ravan* α *koja sadrži tačku* $M(1,-1,1)$*, paralelna je pravoj* $p: x + z = 0, x + 2y - 2 = 0$*, a sa ravni* $\beta: 4x + y - z + 2 = 0$ *gradi ugao od* $\frac{\pi}{4}$.

3.15 *Izračunati (koristeći digitron za* arccos*) ugao izmedju prave* $p: x+2y-3z-1=0, x-z+2=0$ *i ravni* $\alpha: x-4y+2z+2=0$.

3.16 *Odrediti jednačinu normale iz tačke* $A(2,3,-1)$ *na ravan* $\alpha: 2x+y-4z+5=0$.

3.17 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku* $M(-1,0,3)$ *i normalna je na pravu* $q: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

3.18 *Odrediti tačku* Q *koja je simetrična tački* $P(3,-2,-4)$ *u odnosu na ravan* $\alpha: 6x+2y-3z-75=0$ *kao i projekciju* P' *tačke* P *na ravan* α.

3.19 *Odrediti tačku* Q *koja je simetrična tački* $P(-1,-2,1)$ *u odnosu na pravu* $l: \frac{x}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{1}$ *kao i projekciju* P' *tačke* P *na pravu* l. *(Uputstvo: Neka je* α *ravan koja sadrži* P*, a normalna je na* l *i* $\{S\}=\alpha\cap l$ *Tada je* S *središte duži* PQ*.)*

3.20 *Odrediti jedančinu ravni koja sadrži pravu* $l: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{3}$ *i normalna je na ravan* $\alpha: 2x-4y+z+5=0$.

3.21 *Odrediti* λ *tako da se prave* $p: \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-1}{-2}$ *i* $q: \frac{x-\lambda}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{0}$ *seku. Koje su koordinate presečne tačke?*

3.22 *Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku* $L(2,-1,7)$ *i seče prave* $p: \frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{1}$ *i* $q: \frac{x-7}{-1}=\frac{y-11}{-3}=\frac{z+2}{0}$.

3.23 *Ispitati da li prava* $p: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-6}=\frac{z+1}{-4}$ *seče trougao* ABC*, ako je* $A(2,4,6)$*,* $B(-4,2,0)$*,* $C(6,4,-2)$*. U slučaju da seče odrediti koordinate presečne tačke.*

3.24 *Odrediti presek trougla* ABC *i ravni* $\alpha: x-y+2z-3=0$*, ako je* $A(1,-2,0)$*,* $B(-1,2,3)$ *i* $C(2,1,3)$.

3.25 *Odrediti presek trougla* ABC *i ravni* $\alpha: x-2y+2z+5=0$*, ako je* $A(0,0,0)$*,* $B(2,2,2)$ *i* $C(2,1,5)$.

4 Poliedarske površi

4.1 *a) Da li sledeća tabela temena i povezanosti zadaje poliedar?*
$p_0=\langle 0,1,4\rangle$, $p_1=\langle 1,2,3,4\rangle$, $p_2=\langle 3,7,8,4\rangle$, $p_3=\langle 3,6,5,4\rangle$.
b) Nacrtati!

4.2 *Data je poliedarska površ pljosnima* $p_0=\langle 1,2,3\rangle$*,* $p_1=\langle 4,5,6\rangle$*,* $p_2=\langle 1,2,4\rangle$ *,* $p_3=\langle 4,5,2\rangle$*,* $p_4=\langle 3,5,2\rangle$*,* $p_5=\langle 3,6,5\rangle$*.* $p_6=\langle 6,3,1\rangle$*,* $p_7=\langle 4,6,1\rangle$.
a) Odrediti joj rub i broj komponenata ruba
b) Skicirati površ (Rešenje: triangulisana trostrana prizma)

4.3 *Data je poliedarska površ pljosnima* $p_0 = \langle 5,6,7\rangle$, $p_1 = \langle 1,3,0\rangle$, $p_2 = \langle 4,0,1,5\rangle$, $p_3 = \langle 6,2,1,5\rangle$, $p_4 = \langle 7,6,2,3\rangle$, $p_5 = \langle 3,0,4,7\rangle$.

a) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.

b) Skicirati površ (Rešenje: Kocka, sa cijih su suprotnih strana isečena dva trougla).

4.4 *a) Skicirati poliedarski model Mebijusove trake i napisati njene pljosni.*

b) Odrediti rub i broj komponenata ruba Mebijusove trake.

b) Dokazati da Mebijusova traka nije orjentabilna.

4.5 *Data je poliedarska površ pljosnima* $p_0 = \langle 0,1,2\rangle$, $p_1 = \langle 3,0,2\rangle$, $p_2 = \langle 0,5,6\rangle$, $p_3 = \langle 1,2,4\rangle$, $p_4 = \langle 6,7,4\rangle$, $p_5 = \langle 7,1,6\rangle$,$p_6 = \langle 6,0,1\rangle$, $p_7 = \langle 4,6,5\rangle$,$p_8 = \langle 3,5,2\rangle$, $p_9 = \langle 4,2,5\rangle$.

a) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.

b) Izvršiti uskladjivanje orjentacija pljosni, počev od pljosni $p_0 = \langle 0,1,2\rangle$. *Da li je površ orjentabilna?*

4.6 *Data je poliedarska površ pljosnima* $p_0 = \langle 0,1,5,4\rangle$, $p_1 = \langle 6,2,1,5\rangle$, $p_2 = \langle 4,3,7,0\rangle$, $p_3 = \langle 3,6,7\rangle$, $p_4 = \langle 3,6,2\rangle$. *a) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.*

b) Izvršiti uskladjivanje orjentacija pljosni. Da li je površ orjentabilna?

5 Zadaci za vežbu