

Teorema *rastojanje tačke M od prave p , određene tačkom $P \in p$ i vektorom pravca \vec{p} , je dato formulom*

$$d = \frac{|\vec{p} \times \vec{PM}|}{|\vec{p}|}.$$

Teorema *Rastojanje tačke $M(x_0, y_0, z_0)$ od ravni $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ dato je formulom*

$$d(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Zadatak 1 *Odrediti rastojanje tačke $M(1, 0, 12)$ od prave p : $x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.*

Zadatak 2 *Odrediti rastojanje tačke $M(1, 0, 12)$ od ravni α : $x - y - 4z = 0$.*

Teorema (Pramen ravni) Skup svih ravni koje sadrže pravu p koja je data jednačinom ($??$), osim ravni β je dat jednačinom

$$\gamma_\lambda : ax + by + cz + d + \lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0,$$

za $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zadatak 3 Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : x = 4t - 2, y = t + 2, z = -2t - 2$, i čije je rastojanje od tačke $M(3, 2, 1)$ jednako $\sqrt{14}$.

Zadatak 4 Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ i normalna je na ravan $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.

Zadatak 5 Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $L(2, -1, 7)$ i seče prave $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ i $q : \frac{x-7}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.

Medjusobni položaji dve ravni

- Ravni α i β **se poklapaju** ako su jednačine proporcionalne.
- Ravni α i β **su paralelne** ako su im normalni vektori proporcionalni (kolinearni), tj. $|\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta| = 0$.
- Ravni α i β **se seku po pravoj** ako su im normalni vektori nekolinearni, tj. $|\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta| \neq 0$.

Medjusobni položaji dve prave

- Prave p i q **se poklapaju** ako i samo ako su vektori \vec{p} , \vec{q} , \vec{PQ} kolinearni.
- Prave p i q **su paralelne i različite** ako i samo ako su vektori \vec{p} i \vec{q} kolinearni, a vektor \vec{PQ} im nije kolinearan.
- Prave p i q **se seku ako** i samo ako su vektori \vec{p} i \vec{q} nisu kolinearni, a vektori \vec{p} , \vec{q} i \vec{PQ} su koplanarni.
- Prave p i q **su mimoilazne** ako i samo ako vektori \vec{p} , \vec{q} i \vec{PQ} nisu koplanarni.

Zadatak 6 *Odrediti medjusobni položaj pravih*

$$a) \quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-19}{5} = \frac{z-2}{1}, \quad q : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}.$$

$$b) \quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \quad q : 2x = y, 3x = z$$

$$c) \quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \quad q : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$

$$d) \quad p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \quad q : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$$

Teorema *Mimoilazne prave p i q imaju jedinstvenu zajedničku normalu, tj. pravu n koja seče obe prave p i q i na njih je upravna.*

Teorema *Rastojanje izmedju mimoilaznih pravih p i q dato je sledećom formulom*

$$d(p, q) = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Zadatak 7 *Odrediti zajedničku normalu i rastojanje izmedju mimoilaznih pravih*

$$p : \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0} \quad q : \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5}.$$

Zadatak 8 *Odrediti zajedničku normalu i rastojanje izmedju mimoilaznih pravih $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ i $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.*

Medjusobni položaj prave i ravni

Prava može da pripada ravni, da joj bude paralelna ili da seče ravan u jednoj tački.

Zadatak 9 Data je ravan $\alpha : x - 2y + 5z - 1 = 0$. Odrediti presek te ravni sa pravama:

a) $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{7} = \frac{z}{1};$

b) $q : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1};$

c) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1};$

d) $s : x - y = 1, x + y - z + 5 = 0;$

e) $t : x - z + 2 = 0, -y + 3z + 2 = 0.$