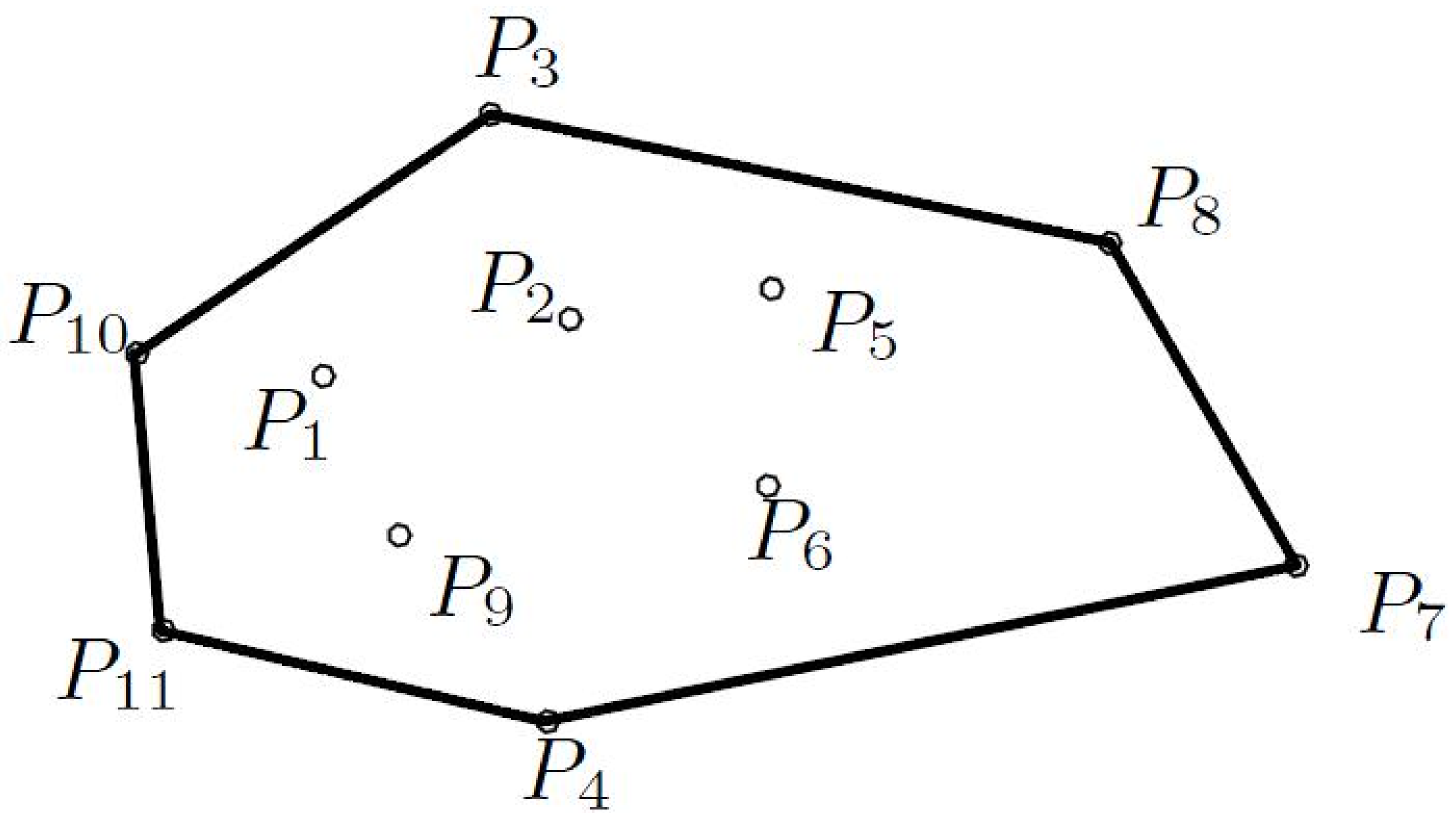
# Konveksni omotač skupa od $n$ tačaka ravni

**Definicija 1** *Za lik $\mathcal{F}$ kažemo da je* **konveksan** *ako za svake dve tačke $A, B \in \mathcal{F}$ koje mu pripadaju i cela duž $AB$ pripada liku $\mathcal{F}$.* **Konveksni omotač** *$\mathcal{CH}(\mathcal{F})$ nekog lika $\mathcal{F} \subset E^n$ je najmanji konveksan podskup od $E^n$ koji sadrži $\mathcal{F}$.*

Sada se bavimo odredjivanjem konveksnog omotača skupa $\mathcal{F} = \{P_1, \dots P_n\}$ koji se sastoji od $n$ tačaka ravni. **Može se dokazati da taj konveksni omotač uvek postoji, da je jedinstven i da je to konveksan poligon čija su temena neke od tačaka skupa $\mathcal{F}$.**

**Ulaz:** skup $P[i] = \{P_1, \dots P_n\}$ od $n$ tačaka ravni

**Izlaz:** temena $CH[j] = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_k}\}, \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots n\}$ konveksnog omotača, poredjana suprotno od smera kazaljke na satu.


$P_3$
$P_8$
$P_2$
$P_5$
$P_{10}$
$P_1$
$P_6$
$P_7$
$P_9$
$P_{11}$
$P_4$

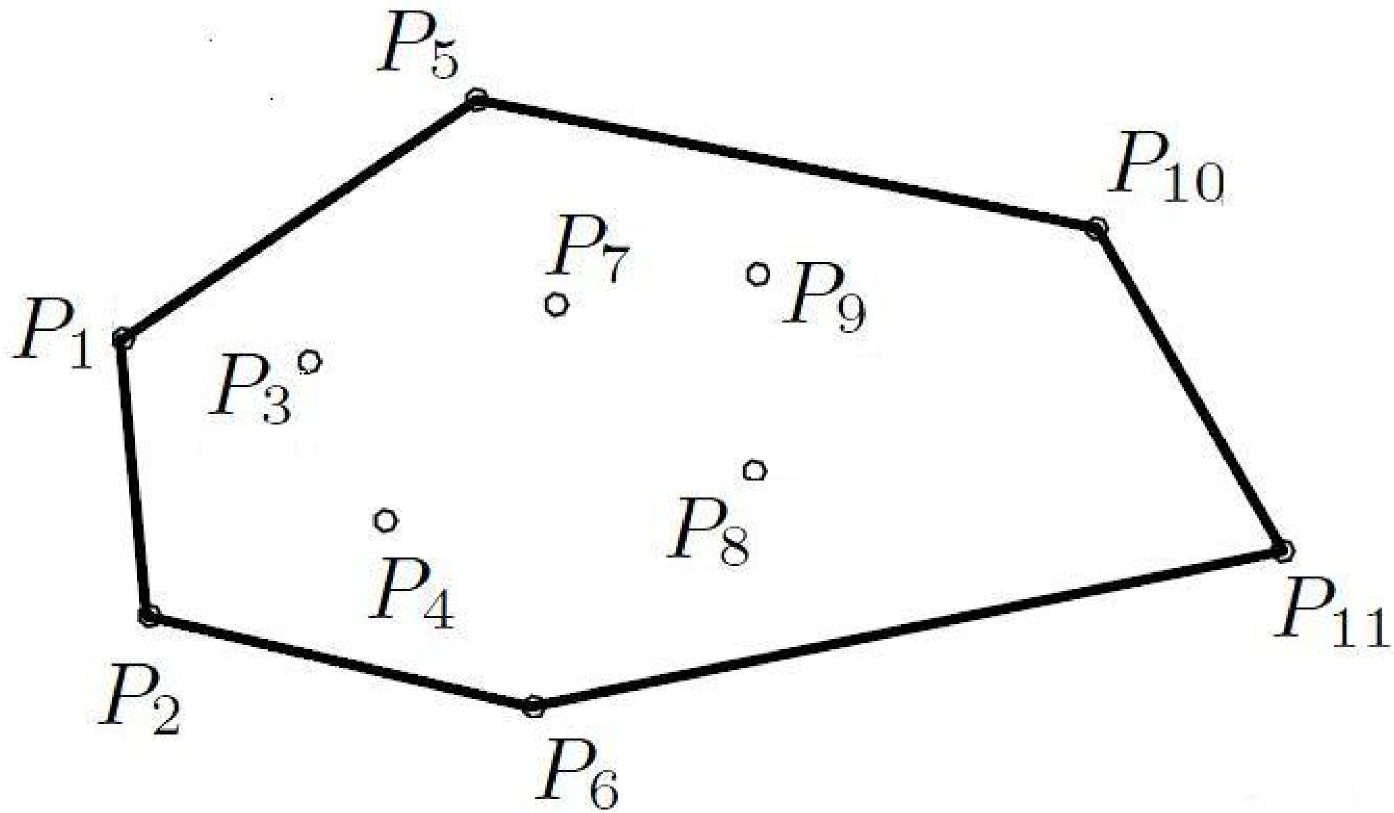
## Konveksni omotač - spori algoritam (reda $O(n^3)$)

```
for(i=1, i<n, i++){
    for(j=1, j<= n, j++){
        ivica = TRUE;
        for(k=1, k<= n, k++){
            if(not(levo(P[i], P[j], P[k]))){
                ivica = FALSE;
                break;
            }
        }
        if(ivica) dodaj(P[i]P[j], CH);
    }
}
preuredi(CH);
```

Napomena: **levo**$(A, B, C)$ znači da je trougao $ABC$ pozitivne orjentacije (tj. tačka $C$ "levo" od usmerene duži $AB$)

## Konveksni omotač - brzi algoritam (reda $O(n \log n)$)

```
sortiraj P[i] po x koordinati
gornji = {P[1], P[2]};
for(i=3, i<= n, i++){
    gornji = dodaj(gornji, P[i]) = {Q[1] = P[1], ...Q[k], P[i]};
                                 // k zavisi od i
    while( k > 1 ili levo(P[i], Q[k-1], Q[k])){
        gornji = izbaci(gornji, Q[k]);
        k--;
    }
}
donji = {P[n], P[n-1]};
for(i=n-2, i>=1, i--){
    donji = dodaj(donji, P[i]) = {Q[1] = P[n], ...Q[k], P[i]};
    while( k > 1 ili levo(P[i], Q[k-1], Q[k])){
        donji = izbaci(donji, Q[k]);
        k--;
    }
}
CH = spoji(gornji, donji);
```


$P_5$
$P_{10}$
$P_7$
$P_9$
$P_1$
$P_3$
$P_8$
$P_4$
$P_{11}$
$P_2$
$P_6$

# Krug i parametrizacija kruga

**Krug** sa centrom $C(x_0, y_0)$ je skup tačaka $M(x, y)$ koje su od centra udaljene za rastojanje $r$ - poluprečnik kruga. Jednačina tog kruga je

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Jednačine

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos\phi, \\ y &= y_0 + r\sin\phi, \qquad \phi \in [0, 2\pi), \end{aligned}$$

se nazivaju **parametrizacija kruga (centralnim uglom).** Parametar $\phi$ je orjentisani ugao izmedju $Ox$ ose i vektora $\overrightarrow{CM}$ .

**Zadatak 1** *Odrediti centar i poluprečnik kruga* $k : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

**Zadatak 2** *a) Odrediti centar i poluprečnik opisanog kruga u trougao* $ABC$*, ako je* $A(1,2)$, $B(4,3)$ $C(6,0)$

*b) Napisati parametrizaciju tog kruga.*

## Aproksimacija parametrizovane krive poligonom

Parametrizovana kriva $\alpha(t), t \in [a, b]$ se najjednostavnije parametrizuje poligonskom linijom $p = P_0 P_1 \dots P_n$ sa $n + 1$ temenom na sledeći način.

$$step = (b - a) \backslash n$$

$$P_i = \alpha(a + i * step), i = 0, \dots, n$$

Na taj način se kriva crta pomoću $n$ duži $P_i P_{i+1}, i = 0 \dots n - 1$, ivica poligona $p$.

```
typedef struct {
    float x;
    float y;
} Tacka;

typedef struct {
    Tacka start;
    Tacka pravac;
} Prava;            (isto i Poluprava)

typedef struct {
    Tacka centar;
    float r;
} Krug;

typedef struct {

    Tacka start;

    Tacka end;

} Duz;
```

## Neki jednostavni zadaci u ravni

Kao primer, navodimo dva jednostavna problema čije **rešenje je prilagodjeno strukturama** kojima predstavljamo tačku, pravu i ravan.

- Odrediti podnožje normale iz tačke $C$ na pravoj $p$.

- Odrediti presek prave $p$ i kruga $k$.

**Primer 1** *Odrediti presek prave* $p : P(0,-1), \overrightarrow{p} = (1,1)$ *i kruga* $k : C(3,4), r = 2$.

**Primer 2** *Odrediti jednačinu kruga i parametarsku jednačinu prave iz prethodnog zadatka. Zatim "matematički" odrediti presek prave i kruga.*

## Presek dva kruga

Neka su data dva kruga $k_1$ i $k_2$ sa centrima $C(c_1, c_2)$ i $S(s_1, s_2)$ i poluprečnicima $r_1$ i $r_2$, redom. Za odredjivanje njihovog preseka, potrebno je odrediti pravu $r$ koja se zove **radikalna osa** tih krugova. Ona se dobija "oduzimanjem" jednačina tih krugova i glasi

$$r : 2(c_1 - s_1)x + 2(c_2 - s_2)y + s_1^2 + s_2^2 - c_1^2 - c_2^2 + r_1^2 - r_2^2 = 0.$$

Presek krugova $k_1$ i $k_2$ je isti kao presek bilo kog kruga sa radikalnom osom, čime se ovaj zadatak svodi na presek prave i kruga.

# Krive drugog reda u kanonskom obliku

## Elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Parametarska jednačina elipse:

$$x = a \cos\phi, \quad y = b \sin\phi, \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

## Hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Parametarska jednačina (desne grane) hiperbole:

$$x = \pm a \cosh\phi, \quad y = b \sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

**Parabola**

$$y^2 = 2px,$$

## Fokusne osobine krivih drugog reda

Elipsa je skup tačaka ravni čiji je zbir rastojanja od dve fiksirane tačke (žiže elipse) konstantan ($MF_1 + MF_2 = 2a$).

Hiperbola je skup tačaka ravni čija je apsolutna vrednost razlike rastojanja od dve fiksirane tačke (žiže hiperbole) konstantna ($\|MF_1 - MF_2\| = 2a$).

Parabola je skup tačaka ravni koje su jednako udaljene od fiksirane prave (direktrisa) i fiksirane tačke (žiža) ($MF = d(M, d)$.)

## Optičke osobine elipse, hiperbole i parabole.

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže elipse i odbija se od elipse, prolazi kroz drugu žižu elipse.

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže hiperbole i odbija se od hiperbole, (izgleda kao da) prolazi kroz drugu žižu hiperbole.

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže parabole i odbija se od parabole, paralelan je osi parabole.