Jednačina prave u prostoru

Prava u prostoru je zadata tačkom $P(x_0, y_0, z_0)$ i nenula vektor pravca $\overrightarrow{p}\,(p_x, p_y, p_z)$. Tada je svaka tačka M prave p oblika

$$M(t) = M = P + t\,\overrightarrow{p}, \tag{1}$$

za neko $t \in \mathbb{R}$. U koordinatama imamo

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \\ z &= z_0 + tp_z, \end{aligned} \tag{2}$$

$t \in \mathbb{R}$ što obično zovemo **parametarska jednačina prave**. Kada jednačine prave (2) rešimo po parametru t dobijamo

$$\frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y} = \frac{z - z_0}{p_z} = t, \tag{3}$$

što se često zove **kanonski oblik jednačine prave.**

Prava kao presek dve ravni

Posmatrajmo sistem dve linearne jednačine

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad ax + by + cz + d = 0, \\ \beta: &\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

koje predstavljaju ravni α i β. Ako su vektori $\overrightarrow{n_\alpha}$ i $\overrightarrow{n_\beta}$ kolinearni, tj. $|\overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta}| = 0$, prave su paralelne ili se poklapaju. U suprotnom, ako su vektori $\overrightarrow{n_\alpha}$ i $\overrightarrow{n_\beta}$ nezavisni one se seku po jedinstvenoj pravoj $p = \alpha \cap \beta$.

Zadatak 1 *Pravu p koja je presek ravni $\alpha : 3x - y + 2z + 1 = 0$ i $\beta : x - z = 0$ predstaviti u kanonskom obliku.*

Zadatak 2 *Pravu $p : x = t + 4, y = -2t + 1, z = 3t - 2, t \in \mathbb{R}$ zapisati kao presek dve ravni.*

Teorema *rastojanje tačke* M *od prave* p, *odredjene tačkom* $P \in p$ *i vektorom pravca* $\overrightarrow{p}$, *je dato formulom*

$$d = \frac{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{p}|}.$$

Teorema *Rastojanje tačke* $M(x_0, y_0, z_0)$ *od ravni* $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ *dato je formulom*

$$d(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Zadatak 3 *Odrediti rastojanje tačke* $M(1, 0, 12)$ *od prave* $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

Zadatak 4 *Odrediti rastojanje tačke* $M(1, 0, 12)$ *od ravni* $\alpha : x - y - 4z = 0$.

Teorema (Pramen ravni) *Skup svih ravni koje sadrže pravu* p *koja je data jednačinom (4), osim ravni* β *je dat jednačinom*

$$\gamma_\lambda : ax + by + cz + d + \lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0,$$

za $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5 *Odrediti jednačinu ravni* α *koja sadrži pravu* $p : x = 4t-2, y = t+2, z = -2t-2$, *i čije je rastojanje od tačke* $M(3,2,1)$ *jednako* $\sqrt{14}$.

Zadatak 6 *Odrediti jedančinu ravni koja sadrži pravu* $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ *i normalna je na ravan* $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.

Zadatak 7 *Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku* $L(2,-1,7)$ *i seče prave* $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ *i* $q : \frac{x-7}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.

Medjusobni položaji dve ravni

- Ravni α i β **se poklapaju** ako su jednačine proporcionalne.

- Ravni α i β **su paralelne** ako su im normalni vektori proporcionalni (kolinearni), tj. $|\overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta}| = 0$.

- Ravni α i β **se seku po pravoj** ako su im normalni vektori nekolinearn, tj. $|\overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta}| \neq 0$.

Medjusobni položaji dve prave

- Prave p i q **se poklapaju** ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{PQ}$ kolinearni.

- Prave p i q **su paralelne i različite** ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ kolinearni, a vektor $\overrightarrow{PQ}$ im nije kolinearan.

- Prave p i q **se seku ako** i samo ako su vektori $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ nisu kolinearni, a vektori $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ su koplanarni.

- Prave p i q **su mimoilazne** ako i samo ako vektori $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ nisu koplanarni.

Zadatak 8 *Odrediti medjusobni položaj pravih*

a) $$p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-19}{5} = \frac{z-2}{1}, \qquad q : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}.$$

b) $$p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : 2x = y, 3x = z$$

c) $$p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$

d) $$p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1} \qquad q : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$$

Teorema *Mimoilazne prave p i q imaju jedinstvenu* **zajedničku normalu**, *tj. pravu n koja seče obe prave p i q i na njih je upravna.*

Teorema *Rastojanje izmedju mimoilaznih pravih p i q dato je sledećom formulom*

$$d(p,q) = \frac{|[\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}|}.$$

Zadatak 9 *Odrediti zajedničku normalu i rastojanje izmedju mimoilaznih pravih*

$$p : \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0} \qquad q : \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5.}$$

Zadatak 10 *Odrediti zajedničku normalu i rastojanje izmedju mimoilaznih pravih $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ i $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.*

Medjusobni položaj prave i ravni

Prava može da pripada ravni, da joj bude paralelna ili da seče ravan u jednoj tački.

Zadatak 11 *Data je ravan* $\alpha : x - 2y + 5z - 1 = 0$*. Odrediti presek te ravni sa pravama:*

a) $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{7} = \frac{z}{1}$;

b) $q : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$;

c) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$;

d) $s : x - y = 1, x + y - z + 5 = 0$;

e) $t : x - z + 2 = 0, -y + 3z + 2 = 0$.