Afino preslikavanje prostora je preslikavanje koje tačku $M(x,y,z)$ preslikava u tačku $M'(x',y',z')$ po pravilu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

uz uslov $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Geometrijsko značenje matrice $A = (a_{ij})$ i vektora (q_1, q_2, q_3) i osobine afinih preslikavanja prostora su analogne onima u ravni.

Kao u ravni, preslikavanje (1) se može predstaviti matricom:

$$A_q := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i tada kompoziciji preslikavanja odgovara množenje matrica.

Najznačajnija klasa afinih preslikavanja su izometrije (preslikavanja koja čuvaju dužine i uglove), jer se njima realizuju kretanja objekata u prostoru.

Preslikavanje (1) je **izometrija** ako je $AA^T = I$, tj. matrica preslikavanja je **ortogonalna matrica**. Ako je dodatno i $\det A = 1$, izometrija čuva orjentaciju i naziva se **kretanje**.

Teorema (Ojlerova) *Svaka matrica kretanja ($AA^T = I, \det A = 1$) se može predstaviti kao kompozicija tri rotacije oko koordinatnih osa, tj:*

$$A = R_{x'',\phi} \circ R_{y',\theta} \circ R_{z,\psi},$$

za neke uglove $\psi, \phi \in [-\pi, \pi], \theta[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ koje zovemo Ojlerovi uglovi.

Ovde y' i x'' označava da su te ose već zarotirane, a ne ose originalnog koordinatnog sistema.

Na ovoj animaciji oznake se podudaraju sa našima. Primetite samo da koordinatni sistem jeste pozitivne orjentacije, samo je z-osa okrenutna "nadole". Koordinatni sistem je vezan za avion: x-osa je pravac aviona, y-osa krila, a z-osa upravna na ravan aviona.

Matrice rotacija oko koordinatnih osa su date sa:
$$R_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, R_{x,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Na osnovu prethodnog, svaka izometrija prostora koja čuva orjentaciju je kompozicija tri rotacije oko kooridnatnih osa i translacije. Izometrija koja ne čuva orjentaciju (tj. $\det A = -1$) dodatno sadrži i ravnsku refleksiju tj. "ogledanje".

Ravan u prostoru

Ravan α je odredjena normalnim vektorom $\overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$ i tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Jednačina te ravni je:

$$\begin{aligned} 0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = \\ &= ax + by + cy + d \end{aligned}$$

Poluravan je odredjena nejednačinom $ax + by + cy + d > 0$, odnosno $ax + by + cy + d < 0$.

Zadatak 1 *a) Odrediti ravan* β *koja sadrži tačku* $B(1, 3, -2)$ *i paralelna ravni* $\alpha : x - 3y + 4z - 6 = 0$.
b) Da li se $A(1, 1, 1)$ *i* $C(-1, -1, 3)$ *nalaze sa iste strane ravni* β.

Zadatak 2 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke* $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, -1)$ *i* $C(0, 0, 1)$.

Parametarska jednačina ravni

Drugi način da opišemo ravan α jeste da joj zadamo jednu tačku $A(x_0, y_0, z_0)$ i dva vektora $\overrightarrow{u}\,(u_x, u_y, u_z)$ i $\overrightarrow{v}\,(v_x, v_y, v_z)$ paralelna ravni α. Tada se svaka tačka M ravni α može zapisati u obliku

$$M(t, s) = M = A + t\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v}, \tag{2}$$

za neke brojeve $t, s \in \mathbb{R}$. Vektorska jednačina (2) se u koordinatama zapisuje kao

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tu_x + sv_x, \\ y &= y_0 + tu_y + sv_y, \\ z &= z_0 + tu_z + sv_z, \end{aligned} \tag{3}$$

za $t, s \in \mathbb{R}$ što obično zovemo **parametarska jednačina ravni**.

Zadatak 3 *Data je ravan α parametarski:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 3 & + & 2t & + & s, \\ y & = & -7 & - & t, & & \\ z & = & & & t & - & 6s, \end{array}$$

$t, s \in \mathbb{R}$. *Odrediti implicitni oblik te ravni.*

Zadatak 4 *Odrediti parametarski oblik ravni* $\alpha : x-y+6z-1=0$.

Zadatak 5 *Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke* $A(1,2,3)$, $B(-1,2,-1)$ *i* $C(0,0,1)$.

Koordinatni sistem prilagodjen datoj ravni

Za rešavanje mnogih problema korisno je preći na novi ortonormirani koordinatni sistem $Ax'y'z'$ u kom data ravan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ ima jednačinu $z' = 0$.

Takav sistem se odredjuje tako sto se za koordinatni početak uzme neka tačka A ravni α, za vektor z'-ose se uzme jedinični vektor $\overrightarrow{n_\alpha}$, a vektori y' i x'-osa su bilo koji jedinični, medjusobno ortogonalni vektori, normalni na $\overrightarrow{n_\alpha}$.

Koristeći koordinatni sistem prilagodjen ravni α rešiti sledeći zadatak.

Zadatak 6 *Data je ravan* $\alpha : x + 2y + 2z - 1 = 0$ *i u njoj tačka* $C(3, 1, -2)$*. Odrediti parametrizaciju kruga* k *poluprečnika* $r = 2$ *sa centrom* C *koji pripada ravni* α*.*