Geometrija (I smer)
deo 3: Linije u ravni

Srdjan Vukmirović

Matematički fakultet, Beograd

30. oktobar 2012.

Prava u ravni

Prava p je zadata tačkom $P(x_0, y_0) \in p$ i normalnim vektorom $\vec{n}_p = (a, b)$.

Prava u ravni

Prava p je zadata tačkom $P(x_0, y_0) \in p$ i normalnim vektorom $\vec{n}_p = (a, b)$.
Odatle se izvodi **implicitna jednačina prave**:

$$ax + by + c = 0. \tag{1}$$

Prava u ravni

Prava p je zadata tačkom $P(x_0, y_0) \in p$ i normalnim vektorom $\vec{n}_p = (a, b)$.
Odatle se izvodi **implicitna jednačina prave**:

$$ax + by + c = 0. \tag{1}$$

Jednačina prave (1) je **normalizovana** ako je $|\vec{n}_p| = 1$.

Prava u ravni

Prava p je zadata tačkom $P(x_0, y_0) \in p$ i normalnim vektorom $\overrightarrow{n}_p = (a, b)$.
Odatle se izvodi **implicitna jednačina prave**:

$$ax + by + c = 0. \tag{1}$$

Jednačina prave (1) je **normalizovana** ako je $|\overrightarrow{n}_p| = 1$.

Primer

Odrediti normalizovanu jednačinu prave koja sadrži tačku $M(1, -2)$ i čiji je normalni vektor $\overrightarrow{n}_p\ (3, 4)$.

Drugi način da opišemo pravu jeste da joj zadamo jednu tačku $P(x_0, y_0)$ i nenula vektor pravca $\overrightarrow{p}\,(p_x, p_y)$.

Drugi način da opišemo pravu jeste da joj zadamo jednu tačku $P(x_0, y_0)$ i nenula vektor pravca $\overrightarrow{p}\,(p_x, p_y)$.Tada se svaka tačka M prave p može zapisati u obliku

$$M(t) = M = P + t\,\overrightarrow{p},$$

za neko $t \in \mathbb{R}$. Ova jednačina se naziva **parametarska jednačina prave**.

Drugi način da opišemo pravu jeste da joj zadamo jednu tačku $P(x_0, y_0)$ i nenula vektor pravca $\overrightarrow{p}\,(p_x, p_y)$.Tada se svaka tačka M prave p može zapisati u obliku

$$M(t) = M = P + t\,\overrightarrow{p},$$

za neko $t \in \mathbb{R}$. Ova jednačina se naziva **parametarska jednačina prave**.

Ona se u koordinatama zapisuje kao u koordinatama zapisuje kao

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Drugi način da opišemo pravu jeste da joj zadamo jednu tačku $P(x_0, y_0)$ i nenula vektor pravca $\overrightarrow{p}\ (p_x, p_y)$.Tada se svaka tačka M prave p može zapisati u obliku

$$M(t) = M = P + t\,\overrightarrow{p},$$

za neko $t \in \mathbb{R}$. Ova jednačina se naziva **parametarska jednačina prave**.
Ona se u koordinatama zapisuje kao u koordinatama zapisuje kao

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primer

Data je prava $p : 3x - 2y + 7 = 0$. a) Odrediti parametarski oblik prave p. b) Koji ugao prava p gradi sa x osom?

Duž i poluprava

Duž AB je parametarski predstavljena sa

$$M(t) = A + t\,\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0,1].$$

Duž i poluprava

Duž AB je parametarski predstavljena sa

$$M(t) = A + t\,\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0,1].$$

Poluprava $[AB)$ sa temenom A koja sadrži tačku B je data sa

$$M(t) = A + t\,\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0,\infty).$$

Duž i poluprava

Duž AB je parametarski predstavljena sa

$$M(t) = A + t\,\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1].$$

Poluprava $[AB)$ sa temenom A koja sadrži tačku B je data sa

$$M(t) = A + t\,\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, \infty).$$

Primer

a) Napisati parametarsku jednačinu duži AB*, ako je* $A(1,2), B(-9,7)$*. b) Odrediti tačke* A_1, A_2, A_3, A_4 *koje duž* AB *dele na* 5 *jednakih delova.*

Poluravan

Za tačke C i D kažemo da su **sa iste strane** prave p ako duž CD ne seče pravu p.

Poluravan

Za tačke C i D kažemo da su **sa iste strane** prave p ako duž CD ne seče pravu p. Primetimo da skup svih tačaka koje su sa iste strane neke prave čini **poluravan.**

Poluravan

Za tačke C i D kažemo da su **sa iste strane** prave p ako duž CD ne seče pravu p. Primetimo da skup svih tačaka koje su sa iste strane neke prave čini **poluravan.**
Ako je prava p data jednačinom $p : f(x, y) = ax + by + c = 0$ tada su tačke C i D sa iste strane prave p akko

$$\text{sign}(f(C)) = \text{sign}(f(D)).$$

Poluravan

Za tačke C i D kažemo da su **sa iste strane** prave p ako duž CD ne seče pravu p. Primetimo da skup svih tačaka koje su sa iste strane neke prave čini **poluravan.**
Ako je prava p data jednačinom $p : f(x, y) = ax + by + c = 0$ tada su tačke C i D sa iste strane prave p akko

$$\mathrm{sign}(f(C)) = \mathrm{sign}(f(D)).$$

Ako je prava p data tačkama A i B, tačke C i D su sa iste strane prave AB akko važi

$$\mathrm{sign}(D_{ABC}) = \mathrm{sign}(D_{ABD}).$$

Poluravan

Za tačke C i D kažemo da su **sa iste strane** prave p ako duž CD ne seče pravu p. Primetimo da skup svih tačaka koje su sa iste strane neke prave čini **poluravan.**
Ako je prava p data jednačinom $p : f(x, y) = ax + by + c = 0$ tada su tačke C i D sa iste strane prave p akko

$$\text{sign}(f(C)) = \text{sign}(f(D)).$$

Ako je prava p data tačkama A i B, tačke C i D su sa iste strane prave AB akko važi

$$\text{sign}(D_{ABC}) = \text{sign}(D_{ABD}).$$

Ako znamo tačku A i vektor $\vec{p}$ prave p, tada mozemo uzeti $\vec{AB} = \vec{p}$ u prethodnoj formuli.

Primer

Ispitati da li tačke $C(1,1)$ *i* $D(-7,11)$ *pripadaju istoj poluravni odredjenoj pravom* AB, $A(2,-2), B(1,3)$.

Primer

Ispitati da li tačke $C(1,1)$ *i* $D(-7,11)$ *pripadaju istoj poluravni odredjenoj pravom* AB, $A(2,-2), B(1,3)$.

Primer

a) Pravu $q: 7x-2y+4=0$ *prebaciti u vektorski oblik.*
b) Odrediti jednačinu prave p *koja sadrži tačku* $P(1,2)$ *i ima vektor pravca* $\vec{p}=(3,-5)$.

Presek pravih

a) Ako su prave $p : ax + by + c = 0$ i $q : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ tada je presek tih pravih skup rešenja odgovarajućeg sistema.

Presek pravih

a) Ako su prave $p : ax + by + c = 0$ i $q : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ tada je presek tih pravih skup rešenja odgovarajućeg sistema.

b) Pretpostavimo da su prave date vektorski: prava p tačkom P i vektorom $\vec{p}$ i prava q tačkom Q i vektorom $\vec{q}$.

Presek pravih

a) Ako su prave $p : ax + by + c = 0$ i $q : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ tada je presek tih pravih skup rešenja odgovarajućeg sistema.

b) Pretpostavimo da su prave date vektorski: prava p tačkom P i vektorom $\vec{p}$ i prava q tačkom Q i vektorom $\vec{q}$. Njihove tačke su

$$M = P + t\,\vec{p}, \qquad N = Q + s\,\vec{q}$$

za $t, s \in \mathbb{R}$.

Presek pravih

a) Ako su prave $p: ax + by + c = 0$ i $q: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ tada je presek tih pravih skup rešenja odgovarajućeg sistema.

b) Pretpostavimo da su prave date vektorski: prava p tačkom P i vektorom $\vec{p}$ i prava q tačkom Q i vektorom $\vec{q}$. Njihove tačke su

$$M = P + t\,\vec{p}, \qquad N = Q + s\,\vec{q}$$

za $t, s \in \mathbb{R}$. Iz uslova da se prave seku, tj. $M = N$, dobijamo:

1) $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ **Seku se u** $N(s)$, $s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$;

2) $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p}) = 0$, **Prave se poklapaju;**

3) $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p}) \neq 0$, **Prave su paralelne.**

Presek duži, polupravih, pravih...

Razmotrimo presek dve duži; analogno se razmatraju i preseci sa polupravama. Ako su date duži

$$AB : M = A + t\,\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0,1]$$

$$CD : N = C + s\,\overrightarrow{CD}, \quad s \in [0,1],$$

presek se odredjuje slično kao i presek pravih.

Presek duži, polupravih, pravih...

Razmotrimo presek dve duži; analogno se razmatraju i preseci sa polupravama. Ako su date duži

$$AB : M = A + t\,\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1]$$

$$CD : N = C + s\,\overrightarrow{CD}, \quad s \in [0, 1],$$

presek se odredjuje slično kao i presek pravih.

1) Ako se desi prvi slučaj potrebno je još proveriti da li $t, s \in [0, 1]$.

Presek duži, polupravih, pravih...

Razmotrimo presek dve duži; analogno se razmatraju i preseci sa polupravama. Ako su date duži

$$AB : M = A + t\,\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1]$$

$$CD : N = C + s\,\overrightarrow{CD}, \quad s \in [0, 1],$$

presek se odredjuje slično kao i presek pravih.

1) Ako se desi prvi slučaj potrebno je još proveriti da li $t, s \in [0, 1]$.

2) Ako se desi drugi slučaj, duži pripadaju jednoj pravoj. Potrebno je proveriti da li se duži preklapaju i "koliko".

Presek duži, polupravih, pravih...

Razmotrimo presek dve duži; analogno se razmatraju i preseci sa polupravama. Ako su date duži

$$AB : M = A + t\ \overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1]$$

$$CD : N = C + s\ \overrightarrow{CD}, \quad s \in [0, 1],$$

presek se odredjuje slično kao i presek pravih.

1) Ako se desi prvi slučaj potrebno je još proveriti da li $t, s \in [0, 1]$.

2) Ako se desi drugi slučaj, duži pripadaju jednoj pravoj. Potrebno je proveriti da li se duži preklapaju i "koliko".

3) U trećem slučaju duži se ne seku, jer pripadaju raznim pravama.

Primer

Odrediti presek pravih p i q koje su zadate tačkom i vektorom pravca:

a) $P(3,1), \overrightarrow{p} = (1,0), \quad Q(2,3), \overrightarrow{q} = (1,1);$

b) $P(3,1), \overrightarrow{p} = (1,0), \quad Q(2,3), \overrightarrow{q} = (-2,0);$

c) $P(3,1), \overrightarrow{p} = (1,-2), \quad Q(2,3), \overrightarrow{q} = (-2,4).$

Primer

Odrediti presek duži AB i CD:

a) $A(1,1), B(3,4), C(0,2), D(5,1);$

b) $A(1,2), B(5,-4), C(3,-1), D(9,-10);$

c) $A(1,2), B(5,-4), C(-2,0), D(0,-3).$

Rastojanja tačke od prave

Rastojanja tačke od prave

Teorema (važi i u prostoru)

Rastojanje tačke M od prave p zadate tačkom P i vektorom pravca $\overrightarrow{p}$ dato je jednačinom

$$d = \frac{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{p}|}.$$

Rastojanja tačke od prave

Teorema (važi i u prostoru)

Rastojanje tačke M od prave p zadate tačkom P i vektorom pravca $\overrightarrow{p}$ dato je jednačinom

$$d = \frac{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{p}|}.$$

Teorema

Rastojanje tačke $M(x_0, y_0)$ od prave $p : ax + by + c = 0$ je dato sa

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Rastojanja tačke od prave

Teorema (važi i u prostoru)

Rastojanje tačke M od prave p zadate tačkom P i vektorom pravca $\vec{p}$ dato je jednačinom

$$d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}.$$

Teorema

Rastojanje tačke $M(x_0, y_0)$ od prave $p : ax + by + c = 0$ je dato sa

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Primer

Izračunati rastojanje tačke $M(1, -3)$ od prave a) $2x - 3y + 1 = 0$, b) prave p zadate sa $\vec{p} = (1, -2)$, $P(1, 0)$.

Poligonska linija i poligon u ravni

Definition

Poligonska linija $A_0A_1\dots A_n$ je unija duži A_0A_1, A_1A_2, $\dots A_{n-1}A_n$. Duži A_iA_{i+1} se zovu **ivice** , a tačke A_i **temena** poligonske linije.

Poligonska linija i poligon u ravni

Definition

Poligonska linija $A_0A_1\dots A_n$ je unija duži A_0A_1, A_1A_2, $\dots A_{n-1}A_n$. Duži A_iA_{i+1} se zovu **ivice** , a tačke A_i **temena** poligonske linije.Duži koje spajaju nesusedna temena zovu se **dijagonale poligona**.

Poligonska linija i poligon u ravni

Definition

Poligonska linija $A_0A_1\dots A_n$ je unija duži A_0A_1, A_1A_2, $\dots A_{n-1}A_n$. Duži A_iA_{i+1} se zovu **ivice** , a tačke A_i **temena** poligonske linije.Duži koje spajaju nesusedna temena zovu se **dijagonale poligona**. Poligonska linija je **zatvorena** ako je $A_n = A_0$. Zatvorena poligonska linija se zove i **poligon**.

Poligonska linija i poligon u ravni

Definition

Poligonska linija $A_0A_1 \dots A_n$ je unija duži A_0A_1, A_1A_2, $\dots A_{n-1}A_n$. Duži A_iA_{i+1} se zovu **ivice** , a tačke A_i **temena** poligonske linije.Duži koje spajaju nesusedna temena zovu se **dijagonale poligona**. Poligonska linija je **zatvorena** ako je $A_n = A_0$. Zatvorena poligonska linija se zove i **poligon**.Poligonska linija je **prosta** ako se nikoje dve ivice ne seku, sem što susedne ivice imaju zajedničko teme.

Poligonska linija i poligon u ravni

Definition

Poligonska linija $A_0A_1 \dots A_n$ je unija duži A_0A_1, A_1A_2, $\dots A_{n-1}A_n$. Duži A_iA_{i+1} se zovu **ivice** , a tačke A_i **temena** poligonske linije.Duži koje spajaju nesusedna temena zovu se **dijagonale poligona**. Poligonska linija je **zatvorena** ako je $A_n = A_0$. Zatvorena poligonska linija se zove i **poligon**.Poligonska linija je **prosta** ako se nikoje dve ivice ne seku, sem što susedne ivice imaju zajedničko teme.

Poligonske linije su osnovni grafički objekti u računarstvu. Osnovni algoritmi:

Poligonska linija i poligon u ravni

Definition

Poligonska linija $A_0 A_1 \ldots A_n$ je unija duži $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, $\ldots A_{n-1} A_n$. Duži $A_i A_{i+1}$ se zovu **ivice** , a tačke A_i **temena** poligonske linije.Duži koje spajaju nesusedna temena zovu se **dijagonale poligona**. Poligonska linija je **zatvorena** ako je $A_n = A_0$. Zatvorena poligonska linija se zove i **poligon**.Poligonska linija je **prosta** ako se nikoje dve ivice ne seku, sem što susedne ivice imaju zajedničko teme.

Poligonske linije su osnovni grafički objekti u računarstvu. Osnovni algoritmi:
unutrašnjost poligona;

Poligonska linija i poligon u ravni

Definition

Poligonska linija $A_0A_1 \dots A_n$ je unija duži A_0A_1, A_1A_2, $\dots A_{n-1}A_n$. Duži A_iA_{i+1} se zovu **ivice** , a tačke A_i **temena** poligonske linije.Duži koje spajaju nesusedna temena zovu se **dijagonale poligona**. Poligonska linija je **zatvorena** ako je $A_n = A_0$. Zatvorena poligonska linija se zove i **poligon**.Poligonska linija je **prosta** ako se nikoje dve ivice ne seku, sem što susedne ivice imaju zajedničko teme.

Poligonske linije su osnovni grafički objekti u računarstvu. Osnovni algoritmi:
unutrašnjost poligona; triangulacija poligona

Poligonska linija i poligon u ravni

Definition

Poligonska linija $A_0A_1 \dots A_n$ je unija duži A_0A_1, A_1A_2, $\dots A_{n-1}A_n$. Duži A_iA_{i+1} se zovu **ivice** , a tačke A_i **temena** poligonske linije.Duži koje spajaju nesusedna temena zovu se **dijagonale poligona**. Poligonska linija je **zatvorena** ako je $A_n = A_0$. Zatvorena poligonska linija se zove i **poligon**.Poligonska linija je **prosta** ako se nikoje dve ivice ne seku, sem što susedne ivice imaju zajedničko teme.

Poligonske linije su osnovni grafički objekti u računarstvu. Osnovni algoritmi:
unutrašnjost poligona; triangulacija poligona konveksni omotač;

Krug i parametrizacija kruga

Krug i parametrizacija kruga

Krug sa centrom $C(x_0, y_0)$ je skup tačaka $M(x, y)$ koje su od centra udaljene za rastojanje r - poluprečnik kruga. Jednačina tog kruga je

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Krug i parametrizacija kruga

Krug sa centrom $C(x_0, y_0)$ je skup tačaka $M(x, y)$ koje su od centra udaljene za rastojanje r - poluprečnik kruga. Jednačina tog kruga je

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Parametarska jednačina

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos\phi, \\ y &= y_0 + r\sin\phi, \end{aligned}$$

$\phi \in [0, 2\pi)$, naziva se **parametrizacija kruga centralnim uglom.**

Krug i parametrizacija kruga

Krug sa centrom $C(x_0, y_0)$ je skup tačaka $M(x, y)$ koje su od centra udaljene za rastojanje r - poluprečnik kruga. Jednačina tog kruga je

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Parametarska jednačina

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos\phi, \\ y &= y_0 + r\sin\phi, \end{aligned}$$

$\phi \in [0, 2\pi)$, naziva se **parametrizacija kruga centralnim uglom.** Parametar ϕ je orjentisani ugao izmedju Ox ose i vektora $\vec{CM}$.

Primer

a) Odrediti centar i poluprečnik kruga $k : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$. *b) Odrediti parametrizaciju tog kruga.*

Zadatak

a) Odrediti centar i poluprečnik opisanog kruga oko trougla ABC, *ako je* $A(4, 6)$, $B(5, -1)$ $C(-4, 2)$

b) Napisati parametrizaciju tog kruga.

Osnovne strukture

Osnovne strukture

```
typedef struct {
   float x;
   float y;
} Tacka;
```

Osnovne strukture

```
typedef struct {
   float x;
   float y;
} Tacka;
```

```
typedef struct {
   Tacka start;
   Tacka pravac;
} Prava;
```

Osnovne strukture

```
typedef struct {
   float x;
   float y;
} Tacka;
```

```
typedef struct {
   Tacka centar;
   float r;
} Krug;
```

```
typedef struct {
   Tacka start;
   Tacka pravac;
} Prava;
```

Osnovne strukture

```
typedef struct {
    float x;
    float y;
} Tacka;
```

```
typedef struct {
    Tacka centar;
    float r;
} Krug;
```

```
typedef struct {
    Tacka start;
    Tacka pravac;
} Prava;
```

```
typedef struct {
    Tacka start;
    Tacka end;
} Duz;
```

Neki jednostavni zadaci u ravni

Rešenje sledeća dva jednostavna problema je prilagodjeno strukturama `Tacka`, `Prava`, `Krug`.

Neki jednostavni zadaci u ravni

Rešenje sledeća dva jednostavna problema je prilagodjeno strukturama `Tacka`, `Prava`, `Krug`.

- Odrediti podnožje normale iz tačke C na pravoj p.

Neki jednostavni zadaci u ravni

Rešenje sledeća dva jednostavna problema je prilagodjeno strukturama `Tacka`, `Prava`, `Krug`.

- Odrediti podnožje normale iz tačke C na pravoj p.
- Odrediti presek prave p i kruga k.

Neki jednostavni zadaci u ravni

Rešenje sledeća dva jednostavna problema je prilagodjeno strukturama `Tacka`, `Prava`, `Krug`.

- Odrediti podnožje normale iz tačke C na pravoj p.
- Odrediti presek prave p i kruga k.

Primer

Odrediti presek prave $p: P(0,-1), \vec{p} = (1,1)$ *i kruga* $k: C(3,4), r = 2$.

Neki jednostavni zadaci u ravni

Rešenje sledeća dva jednostavna problema je prilagodjeno strukturama `Tacka`, `Prava`, `Krug`.

- Odrediti podnožje normale iz tačke C na pravoj p.
- Odrediti presek prave p i kruga k.

Primer

Odrediti presek prave $p : P(0,-1), \vec{p} = (1,1)$ *i kruga* $k : C(3,4), r = 2$.

Primer

Odrediti jednačinu kruga i parametarsku jednačinu prave iz prethodnog zadatka. Zatim "matematički" odrediti njihov presek.

Konusni preseci

Konusni preseci

Kružni konus je površ koja se dobija rotacijom prave p oko prave s u prostoru.

Konusni preseci

Kružni konus je površ koja se dobija rotacijom prave p oko prave s u prostoru.

Konusni presek (konika) je presek kružnog konusa i ravni α koja ne sadrži vrh konusa.

Konusni preseci

Kružni konus je površ koja se dobija rotacijom prave p oko prave s u prostoru.

Konusni presek (konika) je presek kružnog konusa i ravni α koja ne sadrži vrh konusa.

Teorema

U ravni α konusnog preseka postoje prava d i tačka F takve da za svaku tačku M konusnog preseka važi

$$\frac{d(M,F)}{d(M,d)} = e = const.$$

Konusni preseci

Kružni konus je površ koja se dobija rotacijom prave p oko prave s u prostoru.

Konusni presek (konika) je presek kružnog konusa i ravni α koja ne sadrži vrh konusa.

Teorema

U ravni α konusnog preseka postoje prava d i tačka F takve da za svaku tačku M konusnog preseka važi

$$\frac{d(M,F)}{d(M,d)} = e = const.$$

Prava d se zove **direktrisa**, tačka F **žiža**, a broj $e \geq 0$ **ekscentricitet** konusnog preseka.

Pokazuje se da su jedini konusni preseci:

- **elipsa** za $0 \leq e < 1$ (za $e = 0$ dobija se krug);

Pokazuje se da su jedini konusni preseci:

- **elipsa** za $0 \leq e < 1$ (za $e = 0$ dobija se krug);
- **parabola** za $e = 1$;

Pokazuje se da su jedini konusni preseci:

- **elipsa** za $0 \leq e < 1$ (za $e = 0$ dobija se krug);
- **parabola** za $e = 1$;
- **hiperbola** za $e > 1$.

Pokazuje se da su jedini konusni preseci:

- **elipsa** za $0 \leq e < 1$ (za $e = 0$ dobija se krug);
- **parabola** za $e = 1$;
- **hiperbola** za $e > 1$.

Elipsa i hiperbola imaju dve žiže i direktrise, parabola ima jednu. Žiza kruga je njegov centar, a direktrisa beskonačno daleka prava.

Pokazuje se da su jedini konusni preseci:

- **elipsa** za $0 \leq e < 1$ (za $e = 0$ dobija se krug);
- **parabola** za $e = 1$;
- **hiperbola** za $e > 1$.

Elipsa i hiperbola imaju dve žiže i direktrise, parabola ima jednu. Žiza kruga je njegov centar, a direktrisa beskonačno daleka prava.

Konusni preseci se prirodno javljaju:

Pokazuje se da su jedini konusni preseci:

- **elipsa** za $0 \leq e < 1$ (za $e = 0$ dobija se krug);
- **parabola** za $e = 1$;
- **hiperbola** za $e > 1$.

Elipsa i hiperbola imaju dve žiže i direktrise, parabola ima jednu. Žiza kruga je njegov centar, a direktrisa beskonačno daleka prava.

Konusni preseci se prirodno javljaju:

Putanja kosog hica je parabola.

Pokazuje se da su jedini konusni preseci:

- **elipsa** za $0 \leq e < 1$ (za $e = 0$ dobija se krug);
- **parabola** za $e = 1$;
- **hiperbola** za $e > 1$.

Elipsa i hiperbola imaju dve žiže i direktrise, parabola ima jednu. Žiza kruga je njegov centar, a direktrisa beskonačno daleka prava.

Konusni preseci se prirodno javljaju:

Putanja kosog hica je parabola.

Tela Sunčevog sistema (pa i Zemlja, $e \equiv 0,017$) se kreću po eliptičnim putanjama oko Sunca koje je u žizi.

Pokazuje se da su jedini konusni preseci:

- **elipsa** za $0 \leq e < 1$ (za $e = 0$ dobija se krug);
- **parabola** za $e = 1$;
- **hiperbola** za $e > 1$.

Elipsa i hiperbola imaju dve žiže i direktrise, parabola ima jednu. Žiza kruga je njegov centar, a direktrisa beskonačno daleka prava.

Konusni preseci se prirodno javljaju:

Putanja kosog hica je parabola.

Tela Sunčevog sistema (pa i Zemlja, $e \equiv 0,017$) se kreću po eliptičnim putanjama oko Sunca koje je u žizi. Ostala tela prolete pored Sunca po hipeboličkoj (ili paraboličkoj) putanji.

Pokazuje se da su jedini konusni preseci:

- **elipsa** za $0 \leq e < 1$ (za $e = 0$ dobija se krug);
- **parabola** za $e = 1$;
- **hiperbola** za $e > 1$.

Elipsa i hiperbola imaju dve žiže i direktrise, parabola ima jednu. Žiza kruga je njegov centar, a direktrisa beskonačno daleka prava.

Konusni preseci se prirodno javljaju:

Putanja kosog hica je parabola.

Tela Sunčevog sistema (pa i Zemlja, $e \equiv 0,017$) se kreću po eliptičnim putanjama oko Sunca koje je u žizi. Ostala tela prolete pored Sunca po hipeboličkoj (ili paraboličkoj) putanji.

Sunceva senka u toku dana opiše konusni presek . . .

Kanonski oblik konusnih preseka

Elipsa je data jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Kanonski oblik konusnih preseka

Elipsa je data jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Parametarska jednačina elipse:

$$x = a\cos\phi, \quad y = b\sin\phi, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Kanonski oblik konusnih preseka

Elipsa je data jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Parametarska jednačina elipse:

$$x = a\cos\phi, \quad y = b\sin\phi, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Hiperbola je data jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Kanonski oblik konusnih preseka

Elipsa je data jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Parametarska jednačina elipse:

$$x = a\cos\phi, \quad y = b\sin\phi, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Hiperbola je data jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Parametarska jednačina (desne grane) hiperbole:

$$x = \pm a\cosh t, \quad y = b\sinh t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parabola je data jednačinom

$$y^2 = 2px.$$

Fokusne osobine konusnih preseka

Fokusne osobine konusnih preseka

Elipsa je skup tačaka ravni čiji je zbir rastojanja od žiža elipse konstantan ($MF_1 + MF_2 = 2a$).

Fokusne osobine konusnih preseka

Elipsa je skup tačaka ravni čiji je zbir rastojanja od žiža elipse konstantan ($MF_1 + MF_2 = 2a$).

Hiperbola je skup tačaka ravni čija je apsolutna vrednost razlike rastojanja od žiža hiperbole konstantna ($\|MF_1 - MF_2\| = 2a$).

Fokusne osobine konusnih preseka

Elipsa je skup tačaka ravni čiji je zbir rastojanja od žiža elipse konstantan ($MF_1 + MF_2 = 2a$).

Hiperbola je skup tačaka ravni čija je apsolutna vrednost razlike rastojanja od žiža hiperbole konstantna ($\|MF_1 - MF_2\| = 2a$).

Parabola je skup tačaka ravni koje su jednako udaljene od direktrise i od žiže ($d(M, F) = d(M, d)$).

Optičke osobine konusnih preseka

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže elipse i odbija se od elipse, prolazi kroz drugu žižu elipse (tzv. eliptički bilijar).

Optičke osobine konusnih preseka

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže elipse i odbija se od elipse, prolazi kroz drugu žižu elipse (tzv. eliptički bilijar).

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže hiperbole i odbija se od hiperbole, (izgleda kao da) prolazi kroz drugu žižu hiperbole.

Optičke osobine konusnih preseka

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže elipse i odbija se od elipse, prolazi kroz drugu žižu elipse (tzv. eliptički bilijar).

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže hiperbole i odbija se od hiperbole, (izgleda kao da) prolazi kroz drugu žižu hiperbole.

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže parabole i odbija se od parabole, paralelan je osi parabole.

Optičke osobine konusnih preseka

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže elipse i odbija se od elipse, prolazi kroz drugu žižu elipse (tzv. eliptički bilijar).

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže hiperbole i odbija se od hiperbole, (izgleda kao da) prolazi kroz drugu žižu hiperbole.

Svetlosni zrak koji izvire iz žiže parabole i odbija se od parabole, paralelan je osi parabole.

Ovo svojstvo parabole ima veliku primenu u proizvodnji paraboličkih antena, farova...

Krive drugog reda

Krive drugog reda

Kriva prvog reda data jednačinom $ax + by + c = 0$, tj. to je prava.

Krive drugog reda

Kriva prvog reda data jednačinom $ax + by + c = 0$, tj. to je prava.

Kriva drugog reda je skup tačaka ravni čije koordinate (x, y) zadovoljavaju jednačinu drugog stepena

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (2)$$

Krive drugog reda

Kriva prvog reda data jednačinom $ax + by + c = 0$, tj. to je prava.

Kriva drugog reda je skup tačaka ravni čije koordinate (x, y) zadovoljavaju jednačinu drugog stepena

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{2}$$

Primeri krivih drugog reda su elipsa, hiperbola i parabola.

Krive drugog reda

Kriva prvog reda data jednačinom $ax + by + c = 0$, tj. to je prava.

Kriva drugog reda je skup tačaka ravni čije koordinate (x, y) zadovoljavaju jednačinu drugog stepena

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{2}$$

Primeri krivih drugog reda su elipsa, hiperbola i parabola. Šta sve može biti kriva drugog reda?

Teorema (Svodjenje krive 2. reda na kanonski oblik)

Za svaku krivu (2) datu u ON reperu, postoji novi ON reper u čijim koordinatama (x'', y'') *ona ima tačno jednu od jednačina:*

(E) $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$, *(elipsa)*,

(H) $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$, *(hiperbola)*,

(P) $y''^2 = 2px''$, *(parabola)*,

(D1) $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1$, *(prazan skup)*,

(D2) $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0$, *(tačka)*,

(D3) $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0$, *(dve prave koje se seku)*,

(D4) $x''^2 = a^2$, *(dve paralelne prave)*,

(D5) $x''^2 = 0$, *("dvostruka" prava)*,

(D6) $x''^2 = -a^2$, *(prazan skup)*,

gde je $p > 0, \;\; a \geq b > 0$.

Dokaz (ne treba ga znati): Ako je $a_{12} \neq 0$, radimo **rotaciju** za ugao ϕ koji je dat sa:

$$\cot 2\phi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}},$$

$$\cos 2\phi = \frac{\cot 2\phi}{+\sqrt{1 + \cot^2 2\phi}},$$

$$\cos\phi = +\sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}}, \qquad \sin\phi = +\sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}.$$

Zamenom jednačina rotacije

$$\begin{aligned} x &= \cos\phi x' - \sin\phi y', \\ y &= \sin\phi x' + \cos\phi y' \end{aligned} \tag{3}$$

u jednačinu krive (2) dobijamo jednačinu bez člana $x'y'$, recimo:

$$mx'^2 + ny'^2 + 2cx' + 2dy' + e = 0.$$

Sada se kriva svodi na kanonski oblik **translacijom**, tj. "nameštanjem na pune kvadrate." Ponekad je potrebno uraditi i jednostavnu **refleksiju**, tj. zamenu osa x i y.

(kraj dokaza)

Primer (ne treba ga znati)

Izometrijskom transformacijom svesti na kanonski oblik krivu drugog reda $4x^2 + 9y^2 - 2x + 2y - 12xy - 19 = 0$.

Rešenje: Primenom formula iz dokaza dobijamo da je $\cos 2\phi = \frac{5}{13}$. Odatle je $\cos\phi = \frac{3}{\sqrt{13}}$ i $\sin\phi = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Zamenom jednačina rotacije (3) u krivu, nestaje član uz $x'y'$ i dobijamo

$$-\frac{2x'}{\sqrt{13}} + \frac{10y'}{\sqrt{13}} + 13y'^2 - 19 = 0.$$

Translacijom $x'' = x' + \frac{1618}{13\sqrt{13}}$, $y'' = y' + \frac{5}{13\sqrt{13}}$ se dobija da je u pitanju parabola:

$$y''^2 = \frac{2}{13\sqrt{13}}x''.$$

Zadatak

Translacijom svesti krivu drugog reda na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč:

a) $x^2 - 3y^2 - 4x - 18y - 23 = 0$,

b) $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y + 8 = 0$,

c) $3y^2 + 6y - x - 1 = 0$.

Aproksimacija parametrizovane krive poligonom

Parametrizovana kriva $\alpha(t), t \in [a, b]$ se najjednostavnije parametrizuje poligonskom linijom $p = P_0 P_1 \dots P_n$ sa $n + 1$ temenom na sledeći način.

$$step = (b - a) \backslash n$$

$$P_i = \alpha(a + i * step), i = 0, \dots, n$$

Na taj način se kriva crta pomoću n duži $P_i P_{i+1}, i = 0 \dots n - 1$, ivica poligona p.

Bezijerove krive

Pierre Bezier, Paul de Casteljau - krajem 1950ih godina primenili "Bezijerove" krive, tj. površi u automobilskoj industriji (Renault, Citroen).

Bezijerove krive

Pierre Bezier, Paul de Casteljau - krajem 1950ih godina primenili "Bezijerove" krive, tj. površi u automobilskoj industriji (Renault, Citroen).

Razne primene splajn (spline), Bezijerovih i NURBS krivih i površi:

- dizajn (auto i avio industrija, arhitektura, dizajn uopšte)
- kompjuterska grafika (za zadavanje objekata, za putanje animacija...)
- fontovi

Definicija

Neka su $P_0, P_1 \ldots P_n$ tačke ravni. **Bezierova kriva** *stepena n je*

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t) P_i, \quad t \in [0,1].$$

Definicija

Neka su $P_0, P_1 \dots P_n$ *tačke ravni.* **Bezierova kriva** *stepena* n *je*

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t) P_i, \quad t \in [0,1].$$

Tačke P_i nazivaju se **kontrolne tačke**, poligon $P_0 P_1 \dots P_n$ **kontrolna poligonska linija**, a polinomi $B_{n,i}(t)$ **Bernštajnovi polinomi.**

Definicija

Neka su $P_0, P_1 \ldots P_n$ tačke ravni. **Bezierova kriva** *stepena n je*

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t) P_i, \quad t \in [0,1].$$

Tačke P_i nazivaju se **kontrolne tačke**, poligon $P_0 P_1 \ldots P_n$ **kontrolna poligonska linija**, a polinomi $B_{n,i}(t)$ **Bernštajnovi polinomi.**

Bezijerove krive stepena 2 odredjena je sa tri kontrolne tačke:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1].$$

Definicija

Neka su $P_0, P_1 \ldots P_n$ tačke ravni. **Bezierova kriva** *stepena n je*

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t) P_i, \quad t \in [0,1].$$

Tačke P_i nazivaju se **kontrolne tačke**, poligon $P_0 P_1 \ldots P_n$ **kontrolna poligonska linija**, a polinomi $B_{n,i}(t)$ **Bernštajnovi polinomi.**

Bezijerove krive stepena 2 odredjena je sa tri kontrolne tačke:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1].$$

Bezijerova kriva stepena 3 je odredjena sa 4 kontrolne tačke:

$$\alpha_3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0,1].$$

Primer

a) Date su tačke $P_0(1,7)$*,* $P_1(-3,3)$*,* $P_2(3,-3)$*. Odrediti Bezijerovu krivu* $\alpha(t), t \in [0,1]$ *čije su to kontrolne tačke.*
b) Da li je tangenta te krive u tački $\alpha(\frac{1}{2})$ *paralelna pravoj* P_0P_2*?*

Primer

a) Date su tačke $P_0(1,7)$, $P_1(-3,3)$, $P_2(3,-3)$. *Odrediti Bezijerovu krivu* $\alpha(t), t \in [0,1]$ *čije su to kontrolne tačke.*
b) Da li je tangenta te krive u tački $\alpha(\frac{1}{2})$ *paralelna pravoj* P_0P_2*?*

Teorema

a) Bezijerova kriva α_n *odredjena kontrolnom linijom* $P_0P_1\dots P_n$ *ima početak* P_0*, a kraj* P_n*. Ona ne mora da sadrži ostale tačke* P_i*.*

Primer

a) Date su tačke $P_0(1,7)$, $P_1(-3,3)$, $P_2(3,-3)$. *Odrediti Bezijerovu krivu* $\alpha(t), t \in [0,1]$ *čije su to kontrolne tačke.*
b) Da li je tangenta te krive u tački $\alpha(\frac{1}{2})$ *paralelna pravoj* P_0P_2*?*

Teorema

a) Bezijerova kriva α_n *odredjena kontrolnom linijom* $P_0P_1\dots P_n$ *ima početak* P_0*, a kraj* P_n*. Ona ne mora da sadrži ostale tačke* P_i*.*
b) Tangentni vektor krive α_n *u* P_0 *je* $n\,\overrightarrow{P_0P_1}$*, a u* P_n *je* $n\,\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ *.*

Osobine Bezijerovih krivih

Osobine Bezijerovih krivih

- Pomeranje jedne kontrolne tačke P_k za vektor $\vec{v}$ pomera sve tačke krive u pravcu vektora $\vec{v}$.

$$\alpha'_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\ \vec{v}$$

Osobine Bezijerovih krivih

- Pomeranje jedne kontrolne tačke P_k za vektor $\vec{v}$ pomera sve tačke krive u pravcu vektora $\vec{v}$.

$$\alpha'_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\ \vec{v}$$

- Bezierova kriva odredjena tačkama $P_0, \ldots, P_n$ leži unutar konveksnog omotača tih tačaka.

Osobine Bezijerovih krivih

- Pomeranje jedne kontrolne tačke P_k za vektor $\vec{v}$ pomera sve tačke krive u pravcu vektora $\vec{v}$.

$$\alpha'_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\,\vec{v}$$

- Bezierova kriva odredjena tačkama $P_0, \ldots, P_n$ leži unutar konveksnog omotača tih tačaka.
- Ni jedna prava ne preseca Bezierovu krivu više puta nego što seče kontrolnu liniju $P_0 \ldots P_n$ (svojstvo najmanje varijacije).

Osobine Bezijerovih krivih

- Pomeranje jedne kontrolne tačke P_k za vektor $\vec{v}$ pomera sve tačke krive u pravcu vektora $\vec{v}$.

$$\alpha'_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\ \vec{v}$$

- Bezierova kriva odredjena tačkama $P_0, \ldots, P_n$ leži unutar konveksnog omotača tih tačaka.
- Ni jedna prava ne preseca Bezierovu krivu više puta nego što seče kontrolnu liniju $P_0 \ldots P_n$ (svojstvo najmanje varijacije).
- Afina invarijantnost.

Osobine Bezijerovih krivih

- Pomeranje jedne kontrolne tačke P_k za vektor $\vec{v}$ pomera sve tačke krive u pravcu vektora $\vec{v}$.

$$\alpha'_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\,\vec{v}$$

- Bezierova kriva odredjena tačkama $P_0, \ldots, P_n$ leži unutar konveksnog omotača tih tačaka.
- Ni jedna prava ne preseca Bezierovu krivu više puta nego što seče kontrolnu liniju $P_0 \ldots P_n$ (svojstvo najmanje varijacije).
- Afina invarijantnost. Posledica: Bezijerova kriva stepena 2 je deo parabole.

Osobine Bezijerovih krivih

- Pomeranje jedne kontrolne tačke P_k za vektor $\overrightarrow{v}$ pomera sve tačke krive u pravcu vektora $\overrightarrow{v}$.

$$\alpha_n'(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\overrightarrow{v}$$

- Bezierova kriva odredjena tačkama $P_0, \dots, P_n$ leži unutar konveksnog omotača tih tačaka.
- Ni jedna prava ne preseca Bezierovu krivu više puta nego što seče kontrolnu liniju $P_0 \dots P_n$ (svojstvo najmanje varijacije).
- Afina invarijantnost. Posledica: Bezijerova kriva stepena 2 je deo parabole.
- Algoritam De Casteljau.

Algoritam de Casteljau

Algoritam de Casteljau

Ulaz: parametar $t \in (0,1)$, kontrolne tačke $P_0, \ldots, P_n$.
Izlaz: $\alpha_n(t)$ (bez računanja Bernštajnovog polinoma).

1) Označimo $P_{00} = P_0, P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n} = P_n$.

Algoritam de Casteljau

Ulaz: parametar $t \in (0,1)$, kontrolne tačke $P_0, \dots, P_n$.
Izlaz: $\alpha_n(t)$ (bez računanja Bernštajnovog polinoma).

1) Označimo $P_{00} = P_0, P_{01} = P_1, \dots, P_{0n} = P_n$.

2) Izračunamo tačke $P_{1i}, i = 1, \dots n-1$ tako da dele svaku od kontrolnih duži $P_{0i}P_{0(i+1)}$ u odnosu $t : (1-t)$.

Algoritam de Casteljau

Ulaz: parametar $t \in (0, 1)$, kontrolne tačke $P_0, \dots, P_n$.
Izlaz: $\alpha_n(t)$ (bez računanja Bernštajnovog polinoma).

1) Označimo $P_{00} = P_0, P_{01} = P_1, \dots, P_{0n} = P_n$.

2) Izračunamo tačke $P_{1i}, i = 1, \dots n-1$ tako da dele svaku od kontrolnih duži $P_{0i}P_{0(i+1)}$ u odnosu $t : (1-t)$.

3) Ponavljamo prethodni postupak za $k = 2, \dots, n$, tj. računamo tačke $P_{ki}, i = 1, \dots n-k$ tako da dele svaku od kontrolnih duži $P_{(k-1)i}P_{(k-1)(i+1)}$ u odnosu $t : (1-t)$.

Algoritam de Casteljau

Ulaz: parametar $t \in (0,1)$, kontrolne tačke $P_0, \ldots, P_n$.
Izlaz: $\alpha_n(t)$ (bez računanja Bernštajnovog polinoma).

1) Označimo $P_{00} = P_0, P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n} = P_n$.

2) Izračunamo tačke $P_{1i}, i = 1, \ldots n-1$ tako da dele svaku od kontrolnih duži $P_{0i}P_{0(i+1)}$ u odnosu $t : (1-t)$.

3) Ponavljamo prethodni postupak za $k = 2, \ldots, n$, tj. računamo tačke $P_{ki}, i = 1, \ldots n-k$ tako da dele svaku od kontrolnih duži $P_{(k-1)i}P_{(k-1)(i+1)}$ u odnosu $t : (1-t)$.

4) Tačka $\alpha_n(t) = P_{n0}$ je tražena tačka.

Algoritam de Casteljau

Ulaz: parametar $t \in (0,1)$, kontrolne tačke $P_0, \dots, P_n$.
Izlaz: $\alpha_n(t)$ (bez računanja Bernštajnovog polinoma).

1) Označimo $P_{00} = P_0, P_{01} = P_1, \dots, P_{0n} = P_n$.
2) Izračunamo tačke $P_{1i}, i = 1, \dots n-1$ tako da dele svaku od kontrolnih duži $P_{0i}P_{0(i+1)}$ u odnosu $t : (1-t)$.
3) Ponavljamo prethodni postupak za $k = 2, \dots, n$, tj. računamo tačke $P_{ki}, i = 1, \dots n-k$ tako da dele svaku od kontrolnih duži $P_{(k-1)i}P_{(k-1)(i+1)}$ u odnosu $t : (1-t)$.
4) Tačka $\alpha_n(t) = P_{n0}$ je tražena tačka.

Primer

Date su kontrolne tačke $P_0(1,4), P_1(6,-6), P_2(-4,9)$. *Odrediti tačku Bezijerove krive za* $t = 0.2$.

Podela Bezijerove krive

Podela Bezijerove krive

Upotrebom de Casteljau algoritma Bezijerova kriva se u prozvoljnoj tački $\alpha_n(t) = P_{n0}$ može podeliti na dve Bezijerove krive istog stepena.

Podela Bezijerove krive

Upotrebom de Casteljau algoritma Bezijerova kriva se u prozvoljnoj tački $\alpha_n(t) = P_{n0}$ može podeliti na dve Bezijerove krive istog stepena.
Te krive su odredjene kontrolnim tačkama

$$P_0 = P_{00}, P_{10}, P_{20}, \ldots, P_{n0} = \alpha_n(t),$$

odnosno

$$\alpha_n(t) = P_{n0}, P_{(n-1)1}, P_{(n-2)2}, \ldots, P_{0n} = P_n.$$

Podela Bezijerove krive

Upotrebom de Casteljau algoritma Bezijerova kriva se u prozvoljnoj tački $\alpha_n(t) = P_{n0}$ može podeliti na dve Bezijerove krive istog stepena.
Te krive su odredjene kontrolnim tačkama

$$P_0 = P_{00}, P_{10}, P_{20}, \ldots, P_{n0} = \alpha_n(t),$$

odnosno

$$\alpha_n(t) = P_{n0}, P_{(n-1)1}, P_{(n-2)2}, \ldots, P_{0n} = P_n.$$

Primer

Podeliti krivu iz prethodnog Primera na dve krive istog stepena u tački $\alpha_2(0.2)$.

Povećanje stepena Bezijerove krive

Povećanje stepena Bezijerove krive

Bezijerovoj krivoj $\alpha_n(t)$ se može povećati broj kontrolnih tačaka (tj. stepen) bez promene oblika Bezijerove krive.
Da bi povećali stepen za 1 krivoj koja je data tačkama $P_0, \ldots, P_n$ uvode se nove kontrolne tačke $Q_0, \ldots Q_{n+1}$ sa
$Q_0 = P_0, Q_{n+1} = P_n$ i

$$Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 = \frac{i}{n+1}\right) P_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Povećanje stepena Bezijerove krive

Bezijerovoj krivoj $\alpha_n(t)$ se može povećati broj kontrolnih tačaka (tj. stepen) bez promene oblika Bezijerove krive.
Da bi povećali stepen za 1 krivoj koja je data tačkama $P_0, \dots, P_n$ uvode se nove kontrolne tačke $Q_0, \dots Q_{n+1}$ sa
$Q_0 = P_0, Q_{n+1} = P_n$ i

$$Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 = \frac{i}{n+1}\right) P_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Uzastopnom primenom ovog postupka broj tačaka kontrolnog poligona može biti proizvoljno veliki i kontrolno poligon sve bolje i bolje aproksimira krivu.

Povećanje stepena Bezijerove krive

Bezijerovoj krivoj $\alpha_n(t)$ se može povećati broj kontrolnih tačaka (tj. stepen) bez promene oblika Bezijerove krive.
Da bi povećali stepen za 1 krivoj koja je data tačkama $P_0, \ldots, P_n$ uvode se nove kontrolne tačke $Q_0, \ldots Q_{n+1}$ sa
$Q_0 = P_0, Q_{n+1} = P_n$ i

$$Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 = \frac{i}{n+1}\right) P_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Uzastopnom primenom ovog postupka broj tačaka kontrolnog poligona može biti proizvoljno veliki i kontrolno poligon sve bolje i bolje aproksimira krivu.

Primer

Povećati za 1 stepen krivoj čije su kontrolne tačke $P_0(1,2)$, $P_1(4,-4)$, $P_2(-2,5)$.