Zadaci za pripremu prvog kolokvijuma iz Geometrije

5.11.2008

1 Vektori. Koordinate. Vektorska algebra

1.1 (*) *U odnosu na tačku O dati su vektori položaja $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ tačaka A i B $(A \neq B)$. Izraziti vektor položaja tačke C takve da*

a) $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$;

b) tačka C deli duž AB u odnosu $p : q, \; p, q \in \mathbb{N}$.

1.2 (*) *Neka je ABC trougao i tačka T takva da važi $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.*

a) Dokazati da tačka T ne zavisi od izbora tačke O.

b) Dokažati da je tačka O težište trougla, tj. presek težišnih duži i da ona tetežišne duži deli u odnosu $2 : 1$.

1.3 (*) *Neka je $ABCD$ tetraedar i tačka T takva da važi $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Težišnom duži tetraedra naziva se duž koja spaja teme tetraedra sa težištem naspramne pljosni. Dokazati da se težišne duži tetraedra seku u tački T i da ih ona deli u odnosu $3 : 1$. Tačka T se naziva* **težište tetraedra**.

1.4 *Dat je paralelogram $ABCD$. Ako je tačka F središte stranice BC, tačka G središte stranice CD, a tačka E presek duži AF i BG. Odrediti odnose $\frac{AE}{EF}$ i $\frac{BE}{EG}$.*

1.5 *U ravni je dat trougao ABC. Neka tačka D pripada stranici AB, a tačka E stranici BC, tako da je $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ i $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$. Ako se duži AE i CD seku u tački F odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AE i CD.*

1.6 *Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$. Ako je data baza $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AF}$, odrediti koordinate vektora $\overrightarrow{DD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF}$ i $\overrightarrow{DE}$ u bazi e.*

1.7 *Dati su vektori $\overrightarrow{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ i $\overrightarrow{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ iz $\mathbb{V}^3$ svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a) $\mid \overrightarrow{v} \mid$; b) $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.*

1.8 (*) *a) Dokazati da simetrala ugla u trouglu ABC deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana. b) Ako je A_1 presek simetrale ugla $\angle BAC$ i ivice BC, odrediti vektor $\overrightarrow{AA_1}$ preko vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.*

1.9 (*) *Neka je A' podnožje visine iz temena A trougla ABC. Odrediti vektor $\overrightarrow{AA'}$ preko vektora ivica $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.*

1.10 (*) *Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).*

1.11 *Odrediti površinu trougla odredjenog ABC, ako je $A(1,2)$, $B(2,3)$, $C(-3,4)$.*

1.12 *a) Odrediti mešoviti proizvod $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$, ako su njihove koordinate u ortonormiranoj bazi $\overrightarrow{a} = (1,2,-7)$, $\overrightarrow{b} = (-1,3,3)$, $\overrightarrow{c} = (-1,8,-1)$.*
b) Da li su ti vektori linearno nezavisni.

1.13 (*) *Koristeći skalarni proizvod dokazati da je za trougao ABC ispunjen uslov $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (kosinusna teorema).*

1.14 *Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ivice 1. a) Odrediti ugao izmedju dijagonala strana kocke BC_1 i D_1B_1. b) Odrediti zapreminu tetraedra BC_1B_1D.*

1.15 *Težište trougla OAB je tačka O'. U ravni trougla izabrana su dva koordinatna sistema: sistem Oxy sa početkom u tački O i koordinatnim vektorima $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{OB}$ i sistem $O'x'y'$ sa početkom u tački O' i koordinatnim vektorima $\overrightarrow{f_1}=\overrightarrow{O'A}$ i $\overrightarrow{f_2}=\overrightarrow{O'B}$. Odrediti formule transformacija i koordinate središta stranica trougla OAB u oba sistema.*

1.16 *Dat je tetraedar $OABC$. Koordinatni sistem $Oxyz$ ima početak u temenu O, a koordinatni vektori su $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{OC}$. Koordinatni sistem $Ax'y'z'$ ima početak u temenu A tetraedra, a njegovi koordinatni vektori su $\overrightarrow{f_1}=\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{f_2}=\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{f_3}=\overrightarrow{AF}$, gde su D, E i F središta ivica BC, OA i AB. Odrediti formule transformacija i koordinate temena tetraedra u odnosu na sistem $Ax'y'z'$.*

1.17 *Da li formule*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

prestavljaju transformaciju koordinata izmedju dva ortonormirana repera? Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.

2 Afina preslikavanja ravni

2.1 *Dato je afino preslikavanje formulama*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Odrediti formule inverznog preslikavanja.

2.2 *Odrediti formule homotetije sa centrom u tački* $C(1,2)$ *i koeficientom* 3. *U koju tačku se preslikava koordinatni početak pri ovoj homotetiji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku:* $x' = ...$, $y' = ...$*)*

2.3 *Odrediti formule rotacije za ugao* $\phi = \frac{7\pi}{6}$ *oko tačke* $A(-2,3)$. *U koju tačku se preslikava tačka* $M(1,3)$ *pri ovoj rotaciji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku:* $x' = ...$, $y' = ...$*)*

3 Linearna analitička geometrija u ravni

3.1 *Data je prava* $p : 3x - 2y + 7 = 0$. *a) Odrediti normalizovani oblik te jednačine. b) Odrediti parametarski oblik prave p c) Koji ugao prava p gradi sa x osom?*

3.2 *Data je prava* $q : x = -t + 4, y = 2t - 7, t \in \mathbb{R}$. *a) Odrediti implicitni oblik prave q. b) Odrediti implicitni oblik prave r koja sadrži tačku* $R(3,7)$ *i paralelna je q.*

3.3 *Odrediti jednačinu normale n iz tačke* $A(1,7)$ *na pravu p ako je a)* $p : x = 2t + 4, y = 3t - 5, t \in \mathbb{R}$ *b)* $p : 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0$.

3.4 *Neka je* $A(2,3), B(-1,4)$. *a) Odrediti parametarsku jednačinu prave AB. b) Ispitati da li tačka* $C(14,-1)$ *polupravoj* $[AB)$. *c) Ispitati da li tačka* $D(1, \frac{10}{3})$ *i u kom odnosu ona deli duž AB.*

3.5 *Ispitati da li tačke* $C(1,1)$ *i* $D(-7,11)$ *pripadaju istoj poluravni odredjenoj pravom AB,* $A(2,-2), B(1,3)$.

3.6 (*) *a) Odrediti parametarsku jednačinu paralelograma ABCD ako su date tačke* $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$.

b) Odrediti koordinate četvrtog temena D tog paralelograma.

3.7 *Ispitati da li tačka* $M(2,3)$ *pripada trouglu ABC, ako je* $A(1,7)$, $B(-3,3)$, $C(3,-3)$*?*

3.8 *Izračunati rastojanje tačke* $M(1,-3)$ *od prave a)* $2x - 3y + 1 = 0$, *b) prave p čiji je vektor pravca* $\overrightarrow{p} = (1,-2)$, *a tačka* $P(1,0)$.

3.9 *Odrediti centar i poluprečnik opisanog kruga u trougao* ABC*, ako je* $A(1,2), B(4,3), C(6,0)$ *kao i koordinate težišta trougla.*

3.10 *Odrediti presek pravih* p *i* q *koje su zadate tačkom i vektorom pravca:*
a) $P(3,1), \overrightarrow{p} = (1,0), Q(2,3), \overrightarrow{q} = (1,1)$;
b) $P(3,1), \overrightarrow{p} = (1,0), Q(2,3), \overrightarrow{q} = (-2,0)$;
c) $P(3,1), \overrightarrow{p} = (1,-2), Q(2,3), \overrightarrow{q} = (-2,4)$.

3.11 *Odrediti centar i poluprečnik kruga* $k : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

3.12 *Odrediti presek kruga* k *iz prethodnog zadatka i prave:*
a) $p : \overrightarrow{p} = (1,1), \;\; P(2,-2)$
b) $q : x - y - 4 = 0$.

4 Zadaci za vežbu

4.1 *Dat je paralelogram* $ABCD$*. Ako su* E, F *tačke takve da je* $\overrightarrow{EC} = 2\,\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{FB}$ *i* G *središte duži* BC*. Ako je* $\{X\} = EF \cap AG$ *odrediti u kom odnosu tačka* X *deli duž* AG*. (Rešenje:* $AX : XG = 4 : 3$*.)*

4.2 *Dat je pravilan šestougao* $ABCDEF$*. Ako je data baza* $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AF}$*, odrediti koordinate temena šestougla u reperu* Ae*.*

4.3 *Odrediti zapreminu tetraedra čija su temena* $A(1,0,0)$, $B(3,4,6)$, $C(0,1,0)$, $D(1,1,3)$*. (Rešenje:* $V = \frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 2$*.)*

4.4 *Odrediti bar tri tačke koje pripadaju unutrašnjosti trougla sa temenima* $A(1,4)$, $B(6,5)$, $C(4,6)$.

4.5 *Odrediti formule homotetije sa centrom* $C(3,-2)$ *i koeficientom* -5*. U koju tačku se preslikava tačka* $X(3,-2)$ *pri ovoj homotetiji. (Rešenje: Pošto je* $X = C$*, tačka* X *se slika u sebe, tj.* $X'(3,-2)$*. Proveriti.)*

4.6 *Odrediti podnožje normale iz tačke* $A(1,3)$ *na pravoj* $p : 2x - 2y - 4 = 0$*. (Rešenje: tačka* $(3,1)$*.)*

4.7 *Odrediti presek pravih* AB *i* CD*, gde je* $A(12,3), B(12,5), C(5,7), D(-2,1)$*. (Rešenje: tačka* $(12,13)$*.)*

4.8 *Dat je trougao* ABC, $A(3,5), B(5,3), C(9,3)$*. Odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla, kao i jednačinu opisanog kruga. (Rešenje:* $r = 4, C(7,7)$*.)*

4.9 *a) Da li je trougao* ABC *iz prethodnog zadatka pozitivne orjentacije?*
b) Da li centar kruga pripada trouglu iz prethodnog zadatka.
(Rešenje: a) da b) ne.)

4.10 *Odrediti presek prave* $p : x + y - 8 = 0$ *i kruga* $k : x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$*. (Rešenje: tačke* $(3,5)$ *i* $(5,3)$*.)*