Geometrija (I smer)
deo 2: Afine transformacije

Srdjan Vukmirović

Matematički fakultet, Beograd

13. oktobar 2012.

Transformacije koordinata tačaka

Transformacije koordinata tačaka

Pretpostavimo da za bazne vektore repera Oe i $O'f$ važi

$$\overrightarrow{f_1} = c_{11}\overrightarrow{e_1} + c_{21}\overrightarrow{e_2}, \quad \overrightarrow{f_2} = c_{12}\overrightarrow{e_1} + c_{22}\overrightarrow{e_2}$$

Matrica $C = (c_{ij})$ je tzv. **matrica prelaska** sa baze e na bazu f.

Transformacije koordinata tačaka

Pretpostavimo da za bazne vektore repera Oe i $O'f$ važi

$$\vec{f_1} = c_{11}\,\vec{e_1} + c_{21}\,\vec{e_2}, \quad \vec{f_2} = c_{12}\,\vec{e_1} + c_{22}\,\vec{e_2}$$

Matrica $C = (c_{ij})$ je tzv. **matrica prelaska** sa baze e na bazu f.

Neka su koordinate novog koord. početka su $[O']_{Oe} = (b_1, b_2)$.

Transformacije koordinata tačaka

Pretpostavimo da za bazne vektore repera Oe i $O'f$ važi

$$\overrightarrow{f_1} = c_{11}\,\overrightarrow{e_1} + c_{21}\,\overrightarrow{e_2}, \quad \overrightarrow{f_2} = c_{12}\,\overrightarrow{e_1} + c_{22}\,\overrightarrow{e_2}$$

Matrica $C = (c_{ij})$ je tzv. **matrica prelaska** sa baze e na bazu f.

Neka su koordinate novog koord. početka su $[O']_{Oe} = (b_1, b_2)$.

Za koordinate proizvoljne tačke M u tim sistemima važi:

$$(x, y) = [M]_{Oe} = [\overrightarrow{OM}]_e, \quad \text{odnosno} \quad \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2},$$

$$(x', y') = [M]_{O'f} = [\overrightarrow{O'M}]_f, \quad \text{odnosno} \quad \overrightarrow{O'M} = x'\,\overrightarrow{f_1} + y'\,\overrightarrow{f_2}\,.$$

Odatle imamo

$$\begin{aligned} x\,\vec{e_1} + y\,\vec{e_2} &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = b_1\,\vec{e_1} + b_2\,\vec{e_2} + x'\,\vec{f_1} + y'\,\vec{f_2} = \\ &= b_1\,\vec{e_1} + b_2\,\vec{e_2} + x'(c_{11}\,\vec{e_1} + c_{21}\,\vec{e_2}) + y'(c_{12}\,\vec{e_1} + c_{22}\,\vec{e_2}) = \\ &= (c_{11}x' + c_{12}y' + b_1)\,\vec{e_1} + (c_{21}x' + c_{22}y' + b_2)\,\vec{e_2}\,. \end{aligned}$$

Odatle imamo

$$\begin{aligned}
x \vec{e_1} + y \vec{e_2} &= \vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = b_1 \vec{e_1} + b_2 \vec{e_2} + x' \vec{f_1} + y' \vec{f_2} = \\
&= b_1 \vec{e_1} + b_2 \vec{e_2} + x'(c_{11} \vec{e_1} + c_{21} \vec{e_2}) + y'(c_{12} \vec{e_1} + c_{22} \vec{e_2}) = \\
&= (c_{11}x' + c_{12}y' + b_1) \vec{e_1} + (c_{21}x' + c_{22}y' + b_2) \vec{e_2} .
\end{aligned}$$

Zato važe formule:

$$\begin{aligned}
x &= c_{11}x' + c_{12}y' + b_1, \\
y &= c_{21}x' + c_{22}y' + b_2.
\end{aligned}$$

Te formule predstavljaju **transformaciju koordinata tačaka ravni**, tj. vezu koordinata (x, y) i (x', y') iste tačke M u dva različita koordinatna sistema.

Odatle imamo

$$\begin{aligned}
x \vec{e_1} + y \vec{e_2} &= \vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = b_1 \vec{e_1} + b_2 \vec{e_2} + x' \vec{f_1} + y' \vec{f_2} = \\
&= b_1 \vec{e_1} + b_2 \vec{e_2} + x'(c_{11} \vec{e_1} + c_{21} \vec{e_2}) + y'(c_{12} \vec{e_1} + c_{22} \vec{e_2}) = \\
&= (c_{11}x' + c_{12}y' + b_1) \vec{e_1} + (c_{21}x' + c_{22}y' + b_2) \vec{e_2} .
\end{aligned}$$

Zato važe formule:

$$\begin{aligned}
x &= c_{11}x' + c_{12}y' + b_1, \\
y &= c_{21}x' + c_{22}y' + b_2.
\end{aligned}$$

Te formule predstavljaju **transformaciju koordinata tačaka ravni**, tj. vezu koordinata (x, y) i (x', y') iste tačke M u dva različita koordinatna sistema. Matrično ih zapisujemo ovako:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Primer

Neka je $OABC$ *paralelogram i* $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, $f = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CA})$ *dve baze. Odrediti formule transformacija koordinata u reperima* Oe *i* Bf*, kao i inverzne formule.*

Transformacije koordinata ortonormiranih repera

a) Ako su ON reperi Oe i $O'f$ formule (1) postaju:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Transformacije koordinata ortonormiranih repera

a) Ako su ON reperi Oe i $O'f$ formule (1) postaju:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Ovo je kompozicija **rotacije** za ugao ϕ i **translacije** za vektor (q_1, q_2).

Transformacije koordinata ortonormiranih repera

a) Ako su ON reperi Oe i $O'f$ formule (1) postaju:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Ovo je kompozicija **rotacije** za ugao ϕ i **translacije** za vektor (q_1, q_2).

b) Ukoliko su reperi različitih orjentacija formule su:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Transformacije koordinata ortonormiranih repera

a) Ako su ON reperi Oe i $O'f$ formule (1) postaju:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Ovo je kompozicija **rotacije** za ugao ϕ i **translacije** za vektor (q_1, q_2).

b) Ukoliko su reperi različitih orjentacija formule su:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Ovo je kompozicija **refleksije** u odnosu na pravu kroz O koja gradi ugao $\frac{\phi}{2}$ sa x-osom i **translacije** za vektor (q_1, q_2).

Matrica $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ je **matrica rotacije** za ugao ϕ.

Matrica $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ je **matrica rotacije** za ugao ϕ.

Za nju važi:

1) $R_\phi^{-1} = R_\phi^T = R_{-\phi}$;

Matrica $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ je **matrica rotacije** za ugao ϕ.

Za nju važi:

1) $R_\phi^{-1} = R_\phi^T = R_{-\phi}$;
2) $\det R_\phi = 1$ (> 0 zato što reperi imaju istu orjentaciju).

Matrica $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ je **matrica rotacije** za ugao ϕ.

Za nju važi:

1) $R_\phi^{-1} = R_\phi^T = R_{-\phi}$;
2) $\det R_\phi = 1$ (> 0 zato što reperi imaju istu orjentaciju).

Matrica $S_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$ je **matrica refleksije**.

Matrica $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ je **matrica rotacije** za ugao ϕ.

Za nju važi:

1) $R_\phi^{-1} = R_\phi^T = R_{-\phi}$;
2) $\det R_\phi = 1$ (> 0 zato što reperi imaju istu orjentaciju).

Matrica $S_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$ je **matrica refleksije**.

Za nju takodje važi

1) $S_\phi^{-1} = S_\phi^T$,

Matrica $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ je **matrica rotacije** za ugao ϕ.

Za nju važi:

1) $R_\phi^{-1} = R_\phi^T = R_{-\phi}$;
2) $\det R_\phi = 1$ (> 0 zato što reperi imaju istu orjentaciju).

Matrica $S_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$ je **matrica refleksije**.

Za nju takodje važi

1) $S_\phi^{-1} = S_\phi^T$, ALI
2) $S_\phi = -1$ (< 0 zato što reperi imaju istu orjentaciju).

Matrica $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ je **matrica rotacije** za ugao ϕ.

Za nju važi:

1) $R_\phi^{-1} = R_\phi^T = R_{-\phi}$;
2) $\det R_\phi = 1$ (> 0 zato što reperi imaju istu orjentaciju).

Matrica $S_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$ je **matrica refleksije**.

Za nju takodje važi

1) $S_\phi^{-1} = S_\phi^T$, ALI
2) $S_\phi = -1$ (< 0 zato što reperi imaju istu orjentaciju).

Primer

Pravougaonik $OABC$ ima ivice $OA = 4, OC = 3$ i središte S. Napisati vezu koordinata ON repera Oe i Sf, različitih orjentacija, gde je $\vec{e_1} = \frac{\vec{OA}}{4}$, $\vec{e_2} = \frac{\vec{OC}}{3}$, a $\vec{f_1}$ je kolinearan sa SB.

Afina preslikavanja

Afina preslikavanja

Jednačine (1) se mogu posmatrati i sa tzv. **aktivne tačke gledišta**, tj. kao formule preslikavanja.

Afina preslikavanja

Jednačine (1) se mogu posmatrati i sa tzv. **aktivne tačke gledišta**, tj. kao formule preslikavanja.

Definicija

Afino preslikavanje ravni *je preslikavanje koje tački* $M(x, y)$ *preslikava u tačku* $M'(x', y')$ *po pravilu*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

uz uslov $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Afina preslikavanja

Jednačine (1) se mogu posmatrati i sa tzv. **aktivne tačke gledišta**, tj. kao formule preslikavanja.

Definicija

Afino preslikavanje ravni *je preslikavanje koje tački* $M(x, y)$ *preslikava u tačku* $M'(x', y')$ *po pravilu*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

uz uslov $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Kolone matrice $A = (a_{ij})$ su slike baznih vektora pri tom preslikavanju, a (q_1, q_2) je slika koordinatnog početka.

Afina preslikavanja

Jednačine (1) se mogu posmatrati i sa tzv. **aktivne tačke gledišta**, tj. kao formule preslikavanja.

Definicija

Afino preslikavanje ravni *je preslikavanje koje tački* $M(x, y)$ *preslikava u tačku* $M'(x', y')$ *po pravilu*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

uz uslov $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Kolone matrice $A = (a_{ij})$ su slike baznih vektora pri tom preslikavanju, a (q_1, q_2) je slika koordinatnog početka.

Slično se definiše i **afino preslikavanje prostora.**

Teorema (Osobine afinih preslikavanja ravni)

Bijekcije su

Preslikavaju **pravu** *na pravu;*

Preslikavaju **krug** *u krug ili elipsu;*

Čuvaju razmeru *tri tačke;*

Čuvaju paralelnost *(recimo, slika paralelograma je paralelogram);*

jednoznačno su **odredjena** *slikama tri nekolinearne tačke;*

Odnos površina *slike i originalne figure je* $\frac{V(\mathcal{F}')}{V(\mathcal{F})} = |\det A|$.

Teorema (Osobine afinih preslikavanja ravni)

Bijekcije su

Preslikavaju **pravu** *na pravu;*

Preslikavaju **krug** *u krug ili elipsu;*

Čuvaju razmeru *tri tačke;*

Čuvaju paralelnost *(recimo, slika paralelograma je paralelogram);*

jednoznačno su **odredjena** *slikama tri nekolinearne tačke;*

Odnos površina *slike i originalne figure je* $\frac{V(\mathcal{F}')}{V(\mathcal{F})} = |\det A|$.

Primer

Date su tačke $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$; $A'(4,5)$, $B'(8,7)$, $C'(6,9)$, $D'(2,7)$.

1) Odrediti jednačine afinog preslikavanja koje kvadrat $ABCD$ *preslikava u paralelogram* $A'B'C'D'$.

2) Odrediti jednačinu slike kruga upisanog u kvadrat.

3) Kolika je površina slike kruga.

Predstavljanje afinih preslikavanja matricama

Afino preslikavanje

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

možemo predstaviti matricom:

$$A_q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Predstavljanje afinih preslikavanja matricama

Afino preslikavanje

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

možemo predstaviti matricom:

$$A_q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Teorema

Proizvod matrica (6) odgovara kompoziciji afinih preslikavanja. *Drugim rečima, grupa svih matrica oblika (6) je izomorfna grupi afinih preslikavanja ravni.*

Translacija

Translacija $\tau_{\overrightarrow{q}}$ za vektor $\overrightarrow{q}\ (q_1, q_2)$ data je formulama

$$\begin{aligned} x' &= x + q_1, \\ y' &= y + q_2, \end{aligned}$$

Translacija

Translacija $\tau_{\vec{q}}$ za vektor $\vec{q}\,(q_1, q_2)$ data je formulama

$$\begin{aligned} x' &= x + q_1, \\ y' &= y + q_2, \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Translacija

Translacija $\tau_{\vec{q}}$ za vektor $\vec{q}\,(q_1, q_2)$ data je formulama

$$\begin{aligned} x' &= x + q_1, \\ y' &= y + q_2, \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{odnosno} \quad \tau_{\vec{q}} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translacija

Translacija $\tau_{\overrightarrow{q}}$ za vektor $\overrightarrow{q}\,(q_1, q_2)$ data je formulama

$$\begin{aligned} x' &= x + q_1, \\ y' &= y + q_2, \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{odnosno} \quad \tau_{\overrightarrow{q}} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kompozicija translacija je translacija, tj. **sve translacije čine komutativnu podgrupu grupe afinih transformacija.**

Rotacija

Rotacija oko koordinatnog početka, za ugao ϕ, je data formulama

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Rotacija

Rotacija oko koordinatnog početka, za ugao ϕ, je data formulama

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Za rotaciju oko proizvoljne tačke $Q(q_1, q_2)$ se realizuje malim trikom:

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \tau_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \tau_{\overrightarrow{QO}}.$$

Rotacija

Rotacija oko koordinatnog početka, za ugao ϕ, je data formulama

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Za rotaciju oko proizvoljne tačke $Q(q_1, q_2)$ se realizuje malim trikom:

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \tau_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \tau_{\overrightarrow{QO}}.$$

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Primer

Odrediti formule rotacije oko tačke $S(1,-2)$ *za ugao od* $\frac{2\pi}{3}$.

Primer

Odrediti formule rotacije oko tačke $S(1,-2)$ *za ugao od* $\frac{2\pi}{3}$*.*

Rešenje:

$$\mathcal{R}_{S,\frac{2\pi}{3}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2}-\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -1-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Refleksija

Kao što smo već videli, preslikavanje dato formulama

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

je refleksija u odnosu na pravu p_0 kroz koord. početak, koja gradi ugao ϕ sa $x-$osom.

Refleksija

Kao što smo već videli, preslikavanje dato formulama

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

je refleksija u odnosu na pravu p_0 kroz koord. početak, koja gradi ugao ϕ sa $x-$osom.

Ako prava $p \parallel p_0$ ne prolazi kroz koordinatni početak, nego kroz neku tačku $Q \in p$, tada je refleksija u odnosu na pravu p :

$$\mathcal{S}_p = \tau_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \tau_{\overrightarrow{QO}}.$$

Refleksija

Kao što smo već videli, preslikavanje dato formulama

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

je refleksija u odnosu na pravu p_0 kroz koord. početak, koja gradi ugao ϕ sa $x-$osom.

Ako prava $p \parallel p_0$ ne prolazi kroz koordinatni početak, nego kroz neku tačku $Q \in p$, tada je refleksija u odnosu na pravu p :

$$\mathcal{S}_p = \tau_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \tau_{\overrightarrow{QO}}.$$

Kasnije ćemo videti i drugi, opštiji, način da odredimo formule refleksije.

Preslikavanja koja čuvaju dužine (a samim time i uglove) nazivaju se **izometrije**. Izometrije koje čuvaju orjentaciju zovu se **kretanja**.

Preslikavanja koja čuvaju dužine (a samim time i uglove) nazivaju se **izometrije**. Izometrije koje čuvaju orjentaciju zovu se **kretanja**.

Pošto izometrija preslikava ON bazu u ON bazu, već smo pokazali (formule (2), (3)) da su jedine izometrije ravni: kompozicija translacije i rotacije i kompozicija translacije i refleksije.

Preslikavanja koja čuvaju dužine (a samim time i uglove) nazivaju se **izometrije**. Izometrije koje čuvaju orjentaciju zovu se **kretanja**.

Pošto izometrija preslikava ON bazu u ON bazu, već smo pokazali (formule (2), (3)) da su jedine izometrije ravni: kompozicija translacije i rotacije i kompozicija translacije i refleksije.

Primetimo da u svim tim slučajevima važi $AA^T = I$.

Preslikavanja koja čuvaju dužine (a samim time i uglove) nazivaju se **izometrije**. Izometrije koje čuvaju orjentaciju zovu se **kretanja**.

Pošto izometrija preslikava ON bazu u ON bazu, već smo pokazali (formule (2), (3)) da su jedine izometrije ravni: kompozicija translacije i rotacije i kompozicija translacije i refleksije.

Primetimo da u svim tim slučajevima važi $AA^T = I$.

Teorema

Svaka izometrija prostora $\mathbb{R}^n$ je afino preslikavanje. Šta više, afino preslikavanje je izometrija ako i samo je matrica A preslikavanja ortogonalna, tj. važi $AA^T = I$.

Preslikavanja koja čuvaju dužine (a samim time i uglove) nazivaju se **izometrije**. Izometrije koje čuvaju orjentaciju zovu se **kretanja**.

Pošto izometrija preslikava ON bazu u ON bazu, već smo pokazali (formule (2), (3)) da su jedine izometrije ravni: kompozicija translacije i rotacije i kompozicija translacije i refleksije.

Primetimo da u svim tim slučajevima važi $AA^T = I$.

Teorema

Svaka izometrija prostora $\mathbb{R}^n$ je afino preslikavanje. Šta više, afino preslikavanje je izometrija ako i samo je matrica A preslikavanja ortogonalna, tj. važi $AA^T = I$.

Matrice reda n za koje važi $AA^T = I$ čine tzv. **ortogonalnu grupu** $O(n)$.

Preslikavanja koja čuvaju dužine (a samim time i uglove) nazivaju se **izometrije**. Izometrije koje čuvaju orjentaciju zovu se **kretanja**.

Pošto izometrija preslikava ON bazu u ON bazu, već smo pokazali (formule (2), (3)) da su jedine izometrije ravni: kompozicija translacije i rotacije i kompozicija translacije i refleksije.

Primetimo da u svim tim slučajevima važi $AA^T = I$.

Teorema

Svaka izometrija prostora $\mathbb{R}^n$ je afino preslikavanje. Šta više, afino preslikavanje je izometrija ako i samo je matrica A preslikavanja ortogonalna, tj. važi $AA^T = I$.

Matrice reda n za koje važi $AA^T = I$ čine tzv. **ortogonalnu grupu** $O(n)$. Njena podgrupa $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} \subset O(n)$ zove se **specijalna ortogonalna grupa** i predstavlja kretanja.

Istezanje

Sa $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ označavamo istezanje u pravcu koordinatnih osa, sa centrom u tački Q ($\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$).

Istezanje

Sa $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ označavamo istezanje u pravcu koordinatnih osa, sa centrom u tački Q ($\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$).
Ako je tačka Q koordinatni početak,

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Istezanje

Sa $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ označavamo istezanje u pravcu koordinatnih osa, sa centrom u tački Q $(\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$.
Ako je tačka Q koordinatni početak,

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Primetimo da je $\mathcal{H}_{1,-1}$ refleksija u odnosu na $x-$osu.

Istezanje

Sa $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ označavamo istezanje u pravcu koordinatnih osa, sa centrom u tački Q ($\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$).
Ako je tačka Q koordinatni početak,

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Primetimo da je $\mathcal{H}_{1,-1}$ refleksija u odnosu na $x-$osu.
Ako je tačka Q proizvoljna, slično kao kod rotacije:

$$\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2} = \tau_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \tau_{\overrightarrow{QO}}.$$

Istezanje

Sa $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ označavamo istezanje u pravcu koordinatnih osa, sa centrom u tački Q ($\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$).
Ako je tačka Q koordinatni početak,

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Primetimo da je $\mathcal{H}_{1,-1}$ refleksija u odnosu na $x-$osu.
Ako je tačka Q proizvoljna, slično kao kod rotacije:

$$\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2} = \tau_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \tau_{\overrightarrow{QO}}.$$

Primetimo da je **homotetija** specijalan slučaj ovog preslikavanja za $\lambda_1 = \lambda_2$.

Smicanje

Preslikavanje dato formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

naziva se **smicanje** sa koeficientom λ u pravcu x ose.

Smicanje

Preslikavanje dato formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

naziva se **smicanje** sa koeficientom λ u pravcu x ose.

Smicanje preslikava kvadrat u paralelogram iste visine i osnovice, pa dakle i iste površine ($\det A = 1$).

Smicanje

Preslikavanje dato formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

naziva se **smicanje** sa koeficientom λ u pravcu x ose.

Smicanje preslikava kvadrat u paralelogram iste visine i osnovice, pa dakle i iste površine ($\det A = 1$).

Primer

Prestaviti kao afinu transformaciju sledeće dogadjaje:

1) "pan": miš je pritisnut u $P(x_0, y_0)$, a otpušten u $Q(x_1, y_1)$.
2) "zoom in": klikom miša u $P(x_0, y_0)$, slika se uvećava 40%.
2) "zoom to window": miš je pritisnut u tački $P(x_0, y_0)$, a otpušten u $Q(x_1, y_1)$, gde je PQ dijagonala prozora.

Afina preslikavanja prostora

Afino preslikavanje prostora je preslikavanje koje tačku $M(x, y, z)$ preslikava u tačku $M'(x', y', z')$ po pravilu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$\det(a_{ij}) \neq 0$.

Afina preslikavanja prostora

Afino preslikavanje prostora je preslikavanje koje tačku $M(x, y, z)$ preslikava u tačku $M'(x', y', z')$ po pravilu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$\det(a_{ij}) \neq 0$. Kolone matrice $A = (a_{ij})$ su slike baznih vektora, a tačka (q_1, q_2, q_3) je slika koordinatnog početka.

Afina preslikavanja prostora

Afino preslikavanje prostora je preslikavanje koje tačku $M(x, y, z)$ preslikava u tačku $M'(x', y', z')$ po pravilu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$\det(a_{ij}) \neq 0$. Kolone matrice $A = (a_{ij})$ su slike baznih vektora, a tačka (q_1, q_2, q_3) je slika koordinatnog početka.
Preslikavanje (7) se može predstaviti $4x4$ matricom:

$$A_q := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i tada kompoziciji preslikavanja odgovara množenje matrica.

Najznačajnija klasa afinih preslikavanja su izometrije jer se njima realizuju kretanja objekata u prostoru.

Najznačajnija klasa afinih preslikavanja su izometrije jer se njima realizuju kretanja objekata u prostoru.

Videli smo da je preslikavanje (7) izometrija ako je $AA^T = I$. Ako je dodatno i $\det A = 1$, ta izometrija je kretanje.

Najznačajnija klasa afinih preslikavanja su izometrije jer se njima realizuju kretanja objekata u prostoru.

Videli smo da je preslikavanje (7) izometrija ako je $AA^T = I$. Ako je dodatno i $\det A = 1$, ta izometrija je kretanje.

Teorema (Ojlerova 1)

Svaka matrica kretanja ($AA^T = I, \det A = 1$) *se može predstaviti kao kompozicija tri rotacije oko koordinatnih osa, tj:*

$$A = R_{x'',\phi} \circ R_{y',\theta} \circ R_{z,\psi}.$$

Uglove $\psi, \phi \in [-\pi, \pi], \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *zovemo* **Ojlerovi uglovi.**

Ovde y' i x'' označava da su te ose već zarotirane, a ne ose originalnog koordinatnog sistema.

Na ovoj animaciji oznake se podudaraju sa našima. Primetite samo da koordinatni sistem jeste pozitivne orjentacije, samo je z-osa okrenutna "nadole". Koordinatni sistem je vezan za avion: x-osa je pravac aviona, y-osa krila, a z-osa upravna na ravan aviona.

Na ovoj animaciji oznake se podudaraju sa našima. Primetite samo da koordinatni sistem jeste pozitivne orjentacije, samo je z-osa okrenutna "nadole". Koordinatni sistem je vezan za avion: x-osa je pravac aviona, y-osa krila, a z-osa upravna na ravan aviona.

Matrice rotacija oko koordinatnih osa su date sa:

$$R_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, R_{x,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Na ovoj animaciji oznake se podudaraju sa našima. Primetite samo da koordinatni sistem jeste pozitivne orjentacije, samo je z-osa okrenutna "nadole". Koordinatni sistem je vezan za avion: x-osa je pravac aviona, y-osa krila, a z-osa upravna na ravan aviona.

Matrice rotacija oko koordinatnih osa su date sa:

$$R_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, R_{x,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Na osnovu prethodnog, **svako kretanje prostora je kompozicija tri rotacije oko koordinatnih osa i translacije.**

Na ovoj animaciji oznake se podudaraju sa našima. Primetite samo da koordinatni sistem jeste pozitivne orjentacije, samo je z-osa okrenutna "nadole". Koordinatni sistem je vezan za avion: x-osa je pravac aviona, y-osa krila, a z-osa upravna na ravan aviona.

Matrice rotacija oko koordinatnih osa su date sa:

$$R_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, R_{x,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Na osnovu prethodnog, **svako kretanje prostora je kompozicija tri rotacije oko koordinatnih osa i translacije.**

Izometrija koja ne čuva orjentaciju (tj. $\det A = -1$) dodatno sadrži i ravnsku refleksiju tj. "ogledanje".

Refleksija u odnosu na ravan (pravu)

Pretpostavimo da je n kolona koordinata JEDINIČNOG normalnog vektora ravni α_0, koja sadrži koordinatni početak O.

Refleksija u odnosu na ravan (pravu)

Pretpostavimo da je n kolona koordinata JEDINIČNOG normalnog vektora ravni α_0, koja sadrži koordinatni početak O.
3x3 matrica refleksije $\mathcal{S}_{\alpha_0}$ u odnosu na ravan α_0 je data sa

$$\mathcal{S}_{\alpha_0} : I_3 - 2nn^T,$$

gde je I_3 jedinična 3x3 matrica, a

$$nn^T = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2^2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_3 & n_1 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix}.$$

Refleksija u odnosu na ravan (pravu)

Pretpostavimo da je n kolona koordinata JEDINIČNOG normalnog vektora ravni α_0, koja sadrži koordinatni početak O.
3x3 matrica refleksije $\mathcal{S}_{\alpha_0}$ u odnosu na ravan α_0 je data sa

$$\mathcal{S}_{\alpha_0} : I_3 - 2nn^T,$$

gde je I_3 jedinična $3x3$ matrica, a

$$nn^T = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2^2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_3 & n_1 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix}.$$

Ako ravan $\alpha \parallel \alpha_0$ ne sadrži O nego neku tačku A, tada se refleksija S_α može predstaviti kao kompozicija

$$\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{T}_{\vec{OA}} \circ \mathcal{S}_{\alpha_0} \circ \mathcal{T}_{\vec{AO}}.$$

Rotacija oko prave u prostoru

Pretpostavimo da je p kolona koordinata JEDINIČNOG vektora prave p_0, koja sadrži koordinatni početak O.

Rotacija oko prave u prostoru

Pretpostavimo da je p kolona koordinata JEDINIČNOG vektora prave p_0, koja sadrži koordinatni početak O.
3x3 matrica rotacije $\mathcal{R}_{p_0,\phi}$ u odnosu na pravu p_0 za ugao ϕ u pozitivnom smeru, je data sa

$$\mathcal{R}_{p_0,\phi} : pp^T + \cos\phi(I_3 - pp^T) + \sin\phi p_\times,$$

gde je $p_\times$ matrica vektorskog množenja vektorom p:

$$p_\times = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rotacija oko prave u prostoru

Pretpostavimo da je p kolona koordinata JEDINIČNOG vektora prave p_0, koja sadrži koordinatni početak O.
3x3 matrica rotacije $\mathcal{R}_{p_0,\phi}$ u odnosu na pravu p_0 za ugao ϕ u pozitivnom smeru, je data sa

$$\mathcal{R}_{p_0,\phi} : pp^T + \cos\phi(I_3 - pp^T) + \sin\phi p_\times,$$

gde je $p_\times$ matrica vektorskog množenja vektorom p:

$$p_\times = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ako prava $p \parallel p_0$ ne sadrži O nego neku tačku Q, tada se rotacija $\mathcal{R}_{p,\phi}$ može predstaviti kao kompozicija

$$\mathcal{R}_{p_0,\phi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_{p_0,\phi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Teorema (Ojlerova 2)

Svako kretanje prostora je rotacija oko neke prave p za neki ugao ϕ.

Primer

Odrediti formule refleksije u osnosu na pravu $p : 3x - 4y - 6 = 0$ *(u ravni).*

Primer

Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{3Pi}{2}$ *oko prave p koja sadrži tačku* $Q(1, 0, 0)$ *i ima vektor pravca* $p = (1, 2, 2)$.